海淀区 2020~2021 学年第一学期期中练习

高三数学参考答案

2020.11

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	A	C	C	D	B	C	A	B	A	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
答案	$\sqrt{2}$	-3	25	$\frac{3}{4}$　1	$\frac{2}{3}\pi$　$\frac{3}{2}\pi$

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

因为 $\sin B=2\sin C$，

所以 $b=2c$.

因为 $\cos A=\frac{3}{4}$，$0<A<\pi$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

因为 $S=\sqrt{7}$，

所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2c^2\times\sin A=\sqrt{7}$.

所以 $c^2=4$.

所以 $c=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b=2c$.

因为 $\cos A=\frac{3}{4}$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4c^2+c^2-4c^2\times\frac{3}{4}=2c^2$.

所以 $a=\sqrt{2}c$.

所以 $\frac{a}{c}=\sqrt{2}$.

（17）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$.

因为 $a_5=9$， $a_3+a_9=22$，

所以 $\begin{cases}a_1+4d=9,\\2a_1+10d=22.\end{cases}$

解得：$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_n=2n-1$.

（Ⅱ）选择①②

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为 $b_1=a_1$， $b_3=a_1+a_2$，

所以 $b_1=1$， $b_3=4$.

因为 $S_3=7$，

所以 $b_2=S_3-b_1-b_3=2$.

所以 $q=\dfrac{b_2}{b_1}=2$.

所以 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$.

因为 $S_n<2020$，

所以 $2^n-1<2020$.
所以 $n\le 10$.
即n的最大值为10.

选择①③

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为 $b_1=a_1$， $b_3=a_1+a_2$，

所以 $b_1=1$， $b_3=4$.

所以 $q^2=\dfrac{b_3}{b_1}=4$， $q=\pm 2$.

因为 $b_{n+1}>b_n$，

所以 $q=2$.

所以 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$.

因为 $S_n<2020$,

所以 $2^n-1<2020$.

所以 $n\le 10$.

即 n 的最大值为 10.

选择②③

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $S_3=7$, $b_1=1$,

所以 $1+q+q^2=7$.

所以 $q=2$, 或 $q=-3$.

因为 $b_{n+1}>b_n$,

所以 $q=2$.

所以 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$.

因为 $S_n<2020$,

所以 $2^n-1<2020$

所以 $n\le 10$.

即 n 的最大值为 10.

(18)(本小题共 14 分)

解:(Ⅰ)因为 $e^x>0$,

由 $f(x)=e^x(2x^2-3x)>0$, 得 $2x^2-3x>0$.

所以 $x<0$, 或 $x>\dfrac{3}{2}$.

所以 不等式 $f(x)>0$ 的解集为

$\{x|x<0, 或\ x>\dfrac{3}{2}\}$.

(Ⅱ)由 $f(x)=e^x(2x^2-3x)$ 得: $f'(x)=e^x(2x^2+x-3)$

$=\mathrm{e}^x(2x+3)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=-\dfrac{3}{2}$（舍）.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的情况如下：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\mathrm{e}$	↗	$2\mathrm{e}^2$

所以 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(1)=-\mathrm{e}$；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(2)=2\mathrm{e}^2$.

（19）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le x+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\le x\le 2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（Ⅱ）因为 $f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$，

所以 $f(x-\dfrac{\pi}{6})=2\sin x$.

因为 $g(x)=f(x)f(x-\dfrac{\pi}{6})$，

所以 $g(x)=4\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\sin x$

$=4(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)\sin x$

$=2\sqrt{3}\sin^2 x+2\cos x\sin x$

$=\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}$.

因为 $0\le x\le m$，

所以 $-\dfrac{\pi}{3}\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le 2m-\dfrac{\pi}{3}$.

因为 $g(x)$ 的取值范围为 $[0,2+\sqrt{3}]$，

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

所以 $\frac{\pi}{2}\le 2m-\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$.

解得：$\frac{5\pi}{12}\le m\le\frac{5\pi}{6}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$.

（20）（本小题共 14 分）

解：由 $f(x)=ax^3-3ax^2+2+4a$ 可得：$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，$f(3)=-2$，$f'(3)=-9$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程为 $y=-9x+25$.

（Ⅱ）①当 $a=0$ 时，$f(x)=2$ 在 $\mathbf{R}$ 上不具有单调性.

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=0,x_2=2$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为 $f(x)$ 在 $(a,a+3)$ 上具有单调性，

所以 $a\ge 2$.

③当 $a<0$ 时，

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

因为 $f(x)$ 在 $(a,a+3)$ 上具有单调性，

所以 $a+3\le 0$，即 $a\le -3$.

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$.

（Ⅲ）先证明：$f(x_1)+f(x_2)\ge 4$.

由（Ⅱ）知，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$，递减区间是 $(0,2)$.

因为 $x_1+x_2>2$，不妨设 $x_1\le x_2$，则 $x_2>1$.

①若 $x_1 \le 0$，则 $x_2 > 2 - x_1 \ge 2$.

所以 $f(x_1)+f(x_2) > f(x_1)+f(2-x_1) = 4+4a > 4$.

②若 $x_1 > 0$，因为 $x_2 > 1$，

所以 $f(x_1)+f(x_2) \ge f(2)+f(2) = 4$，当且仅当 $x_1 = x_2 = 2$ 时取等号.

综上所述，$f(x_1)+f(x_2) \ge 4$.

再证明：$f(x_1)+f(x_2)$ 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

假设存在常数 m（$m \ge 4$），使得对任意 $x_1 + x_2 > 2$，$f(x_1)+f(x_2) \le m$.

取 $x_1 = 2$，且 $x_2 > 2+\sqrt{\dfrac{m-4}{a}}$，则

$$\begin{aligned} f(2)+f(x_2) &= 2 + ax_2^3 - 3ax_2^2 + 2 + 4a \\ &= 2 + ax_2(x_2-2)^2 + a(x_2-2)^2 + 2 > a(x_2-2)^2 + 4 > m, \end{aligned}$$

与 $f(x_1)+f(x_2) \le m$ 矛盾.

所以 $f(x_1)+f(x_2)$ 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

（21）（本小题共 15 分）

解：（Ⅰ）取 $i=1, j=2$，则存在 a_k（$2<k<4$），使得 $a_k = 2a_2 - a_1$，即 $a_3 = 2a_2 - a_1$.

因为 $a_1 = a = 3$，$a_2 = b = 5$，

所以 $a_3 = 2a_2 - a_1 = 7$.

（Ⅱ）假设 $\{a_n\}$ 中仅有有限项为 0，不妨设 $a_m = 0$，且当 $n > m$ 时，a_n 均不为 0，则 $m \ge 2$.

取 $i=1, j=m$，则存在 a_k（$m<k<2m$），使得

$a_k = 2a_m - a_1 = 0$，与 $a_k \ne 0$ 矛盾.

（Ⅲ）①当 $a<b$ 时，首先证明数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，即证 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，$a_n < a_{n+1}$ 恒成立.

若不然，则存在最小的正整数 n_0，使得 $a_{n_0} \ge a_{n_0+1}$，且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n_0}$.

显然 $n_0 \ge 2$.取 $j = n_0, i = 1, 2, \cdots, n_0 - 1$，则存在 a_k（$n_0 < k < 2n_0$），使得

$a_k=2a_{n_0}-a_i$.

因为 $2a_{n_0}-a_1>2a_{n_0}-a_2>\cdots>2a_{n_0}-a_{n_0-1}>a_{n_0}$，

所以 $2a_{n_0}-a_1,2a_{n_0}-a_2,\cdots,2a_{n_0}-a_{n_0-1}$ 这 n_0-1 个不同的数恰为

$a_{n_0+1},a_{n_0+2},\cdots,a_{2n_0-1}$ 这 n_0-1 项.

所以 $a_{n_0+1}>a_{n_0}$，与 $a_{n_0+1}\le a_{n_0}$ 矛盾.

所以 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

再证明：$a_n=a+(n-1)(b-a),n=1,2,3,\cdots$.

记 $d=b-a$，即证 $a_n=a+(n-1)d,n=1,2,3,\cdots$.

当 $n=1,2$ 时，结论成立.

假设存在最小的正整数 m_0，使得 $a_n=a+(n-1)d$ 对任意 $1\le n\le m_0$ 恒成立，

但 $a_{m_0+1}\ne a+m_0d$，则 $m_0\ge 2$.

取 $j=m_0,i=1,2,\cdots,m_0-1$，则存在 a_k（$m_0<k<2m_0$），使得 $a_k=2a_{m_0}-a_i$.

因为 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，

所以 $a_1<a_2<\cdots<a_{m_0}<a_{m_0+1}<\cdots<a_{2m_0-1}$.

所以 $2a_{m_0}-a_{m_0-1}<\cdots<2a_{m_0}-a_2<2a_{m_0}-a_1$.

因为 $2a_{m_0}-a_{m_0-1},\cdots,2a_{m_0}-a_2,2a_{m_0}-a_1$ 这 m_0-1 个数恰为

$a_{m_0+1},a_{m_0+2},\cdots,a_{2m_0-1}$ 这 m_0-1 项.

所以 $a_{m_0+1}=2a_{m_0}-a_{m_0-1}=2[a+(m_0-1)d]-[a+(m_0-2)d]=a+m_0d$，

与 $a_{m_0+1}\ne a+m_0d$ 矛盾.

所以 $a_n=a+(n-1)(b-a),n=1,2,3,\cdots$.

②当 $a>b$ 时，令 $b_n=-a_n,n=1,2,3,\cdots$，则 $b_1=-a,b_2=-b$，且 $b_1<b_2$.

对于 $\{b_n\}$ 中任意两项 $b_i,b_j\ (i<j)$，

因为 对任意 $a_i, a_j\ (i<j)$，存在 $a_k\ (j<k<2j)$，使得 $a_k = 2a_j - a_i$，

所以 $-a_k = -2a_j - (-a_i)$，即存在 $b_k\ (j<k<2j)$，使得 $b_k = 2b_j - b_i$.

因此 数列 $\{b_n\}$ 满足题设条件.

由①可知 $b_n = -a + (n-1)(a-b), n = 1,2,3,\cdots$，

所以 $a_n = a + (n-1)(b-a), n = 1,2,3,\cdots$.

综上所述，$a_n = a + (n-1)(b-a), n = 1,2,3,\cdots$.

经检验，数列 $\{a_n\}$ 满足题设条件.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多