2010年全国高中数学联合竞赛

第一试

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是______.

答案：$\left[-3,\sqrt{3}\right]$.

解：$f(x)$ 的定义域是$[5,8]$，且 $f(x)$ 在$[5,8]$上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为$\left[-3,\sqrt{3}\right]$.

2. 已知函数 $y=\left(a\cos^2 x-3\right)\sin x$ 的最小值为-3，则实数 a 的取值范围是______.

答案：$-\frac{3}{2}\le a\le 12$.

解：令 $\sin x=t$，则原函数化为 $g(t)=\left(-at^2+a-3\right)t$，即

$$g(t)=-at^3+(a-3)t.$$

由 $-at^3+(a-3)t\ge -3$，$-at\left(t^2-1\right)-3(t-1)\ge 0$，$(t-1)\left(-at(t+1)-3\right)\ge 0$ 及 $t-1\le 0$ 知 $-at(t+1)-3\le 0$ 即

$$a\left(t^2+t\right)\ge -3. \qquad (1)$$

当 $t=0,-1$ 时（1）总成立；

对 $0<t\le 1, 0<t^2+t\le 2$；对 $-1<t<0, -\frac{1}{4}\le t^2+t<0$. 从而可知 $-\frac{3}{2}\le a\le 12$.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是______.

答案：9800.

解：由对称性知，只要先考虑 x 轴上方的情况，设 $y=k(k=1,2,\cdots,99)$ 与双曲线右半支于 A_k，交直线 $x=100$ 于 B_k，则线段 A_kB_k 内部的整点的个数为 $99-k$，从而在 x 轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^{99}(99-k)=99\times 49=4851.$$

又 x 轴上有98个整点，所以所求整点的个数为 $2\times 4851+98=9800$.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为0的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$，且存在常数 α,β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则 $\alpha+\beta=$ ______.

答案：$\sqrt[3]{3}+3$.

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, $\{b_n\}$ 的公比为 q，则

$$3+d=q, \quad (1)$$

$$3(3+4d)=q^2, \quad (2)$$

(1) 代入 (2) 得 $9+12d=d^2+6d+9$，求得 $d=6,q=9$.

从而有 $3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$ 对一切正整数 n 都成立，即 $6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$ 对一切正整数 n 都成立.

从而

$$\log_\alpha 9=6,-3=-\log_\alpha 9+\beta,$$

求得 $\alpha=\sqrt[3]{3},\beta=3$，$\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5. 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0,a\neq 1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 ______ .

答案：$-\frac{1}{4}$.

解：令 $a^x=y$, 则原函数化为 $g(y)=y^2+3y-2$，$g(y)$ 在 $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上是递增的.

当 $0<a<1$ 时，$y\in\left[a,a^{-1}\right]$，

$$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

所以 $$g(y)_{\min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4};$$

当 $a>1$ 时，$y\in\left[a^{-1},a\right]$，

$$g(y)_{\max}=a^2+3a-2=8\Rightarrow a=2,$$

所以

$$g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\frac{1}{4}.$$

综上 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{4}$.

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 ________.

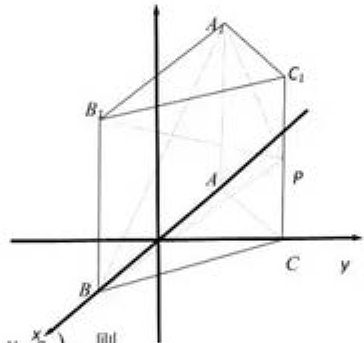
答案：$\frac{12}{17}$.

解：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

$$\frac{7}{12}+\left(\frac{5}{12}\right)^2\times\frac{7}{12}+\left(\frac{5}{12}\right)^4\times\frac{7}{12}+\cdots=\frac{7}{12}\times\frac{1}{1-\frac{25}{144}}=\frac{12}{17}.$$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=$ ______ .

答案：$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



解法一：如图，以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 中点 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系.

设正三棱柱的棱长为 2，

则 $B(1,0,0),B_1(1,0,2),A_1(-1,0,2),P(0,\sqrt{3},1)$.

从而，

$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},1),\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0),\overrightarrow{B_1P}=(-1,\sqrt{3},-1)$.

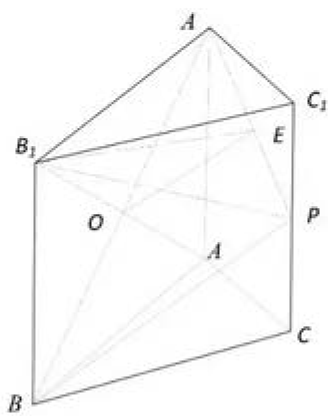
设分别与平面 BA_1P、平面 B_1A_1P 垂直的向量是 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$、$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}\quad\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$$

由此可设 $\vec{m}=(1,0,1),\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$，所以 $|\vec{m}\cdot\vec{n}|=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}||\cos\alpha|$，即

$\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot 2|\cos\alpha|\Rightarrow|\cos\alpha|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

解法二：如图，$PC=PC_1,PA_1=PB$.



设 A_1B 与 AB_1 交于点 O，则 $OA_1=OB,OA=OB_1,A_1B\perp AB_1$.

因为 $PA=PB_1$，所以 $PO\perp AB_1$，从而 $AB_1\perp$ 平面 PA_1B .

过 O 在平面 PA_1B 上作 $OE\perp A_1P$，垂足为 E.

连结 B_1E，则 $\angle B_1EO$ 为二面角 $B-A_1P-B_1$ 的平面角.

设 $AA_1=2$，则易求得 $PB=PA_1=\sqrt{5},A_1O=B_1O=\sqrt{2},PO=\sqrt{3}$.

在直角 ΔPA_1O 中，$A_1O\cdot PO=A_1P\cdot OE$，即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot OE$，$\therefore OE=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O=\sqrt{2}$，$\therefore B_1E=\sqrt{B_1O^2+OE^2}=\sqrt{2+\dfrac{6}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\sin\alpha=\sin\angle B_1EO=\dfrac{B_1O}{B_1E}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

8. 方程$x+y+z=2010$满足$x\le y\le z$的正整数解(x,y,z)的个数是______.

答案：336675.

解：首先易知$x+y+z=2010$的正整数解的个数为 $C_{2009}^2=2009\times1004$.

把$x+y+z=2010$满足$x\le y\le z$的正整数解分为三类：

（1）x,y,z均相等的正整数解的个数显然为1；

（2）x,y,z中有且仅有2个相等的正整数解的个数，易知为1003；

(3)设x,y,z两两均不相等的正整数解为k.

易知 $1+3\times1003+6k=2009\times1004$，

所以 $6k=2009\times1004-3\times1003-1$

$=2006\times1005-2009+3\times2-1=2006\times1005-2004$，

即 $k=1003\times335-334=335671$.

从而满足$x\le y\le z$的正整数解的个数为

$1+1003+335671=336675$.

二、解答题（本题满分56分）

9. （16分）已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne0)$，当$0\le x\le1$时，$|f'(x)|\le1$，试求$a$的最大值.

解法一： $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, 由 $\begin{cases}f'(0)=c,\\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}a+b+c,\\ f'(1)=3a+2b+c\end{cases}$ 得$3a=2f'(0)+2f'(1)-4f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

所以 $3|a|=\left|2f'(0)+2f'(1)-4f'(\frac{1}{2})\right|$

$\le2|f'(0)|+2|f'(1)|+4\left|f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|\le8$，

所以$a\le\dfrac{8}{3}$. 又易知当$f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$为常数）满足题设条件，所以$a$最大值为$\dfrac{8}{3}$.

$$0\le\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a}{4}+b+c+1\le2，$$

从而 $\dfrac{3a}{4}+b+c+1\ge0$, $\dfrac{3a}{4}z^2\le2$，由 $0\le z^2\le1$知$a\le\dfrac{8}{3}$.

解法二：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$． 设$g(x)=f'(x)+1$，则当$0\le x\le1$时，$0\le g(x)\le2$.

设 $z=2x-1$，则$x=\dfrac{z+1}{2},-1\le z\le1$.

$$h(z)=g\left(\frac{z+1}{2}\right)=\frac{3a}{4}z^2+\frac{3a+2b}{2}z+\frac{3a}{4}+b+c+1.$$

容易知道当$-1\le z\le1$时，$0\le h(z)\le2,0\le h(-z)\le2$. 从而当$-1\le z\le1$时，$0\le\dfrac{h(z)+h(-z)}{2}\le2$，

即 $0\le\dfrac{3a}{4}z^2+\dfrac{3a}{4}+b+c+1\le2$从而 $\dfrac{3a}{4}+b+c+1\ge0$, $\dfrac{3a}{4}z^2\le2$，由 $0\le z^2\le1$知$a\le\dfrac{8}{3}$.

又易知当$f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$为常数）满足题设条件，所以$a$最大值为$\dfrac{8}{3}$.

10. （20 分）已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C，求 ΔABC 面积的最大值.

解法一： 设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2, y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}\ .$$

线段 AB 的垂直平分线的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{3}(x-2).\qquad（1）$$

易知 $x=5, y=0$ 是（1）的一个解，所以线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$.

由（1）知直线 AB 的方程为 $y-y_0=\frac{3}{y_0}(x-2)$，即

$$x=\frac{y_0}{3}(y-y_0)+2.\qquad（2）$$

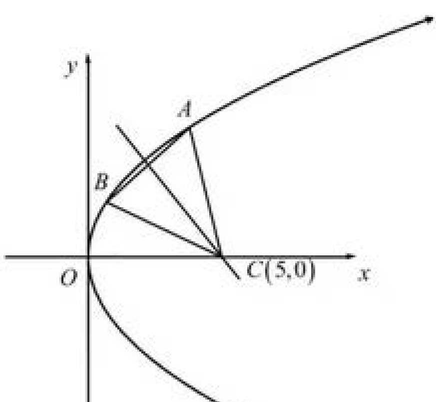
（2）代入 $y^2=6x$ 得 $y^2=2y_0(y-y_0)+12$，即

$$y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0.\qquad（3）$$

依题意，y_1,y_2 是方程（3）的两个实根，且 $y_1\neq y_2$，所以

$$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0,$$

$$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}.$$



$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{\left(1+\left(\frac{y_0}{3}\right)^2\right)(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{9}\right)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}$$
$$=\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{9}\right)\left(4y_0^2-4(2y_0^2-12)\right)}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\ .$$

定点 $C(5,0)$ 到线段 AB 的距离

$$h=|CM|=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{9+y_0^2}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{\left(9+y_0^2\right)\left(12-y_0^2\right)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(9+y_0^2\right)\left(24-2y_0^2\right)\left(9+y_0^2\right)}$$

$$\le\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{14}{3}\sqrt{7}\ .$$

当且仅当 $9+y_0^2=24-2y_0^2$，即 $y_0=\pm\sqrt{5}$，$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}\right),B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$ 或

$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\right),B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$ 时等号成立.

所以，ΔABC 面积的最大值为 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$.

解法二：同解法一，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$.

设 $x_1=t_1^2,x_2=t_2^2,t_1>t_2,t_1^2+t_2^2=4$，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5&0&1\\t_1^2&\sqrt{6}t_1&1\\t_2^2&\sqrt{6}t_2&1\end{vmatrix}$ 的绝对值,

$$S_{\Delta ABC}^2=\left(\frac{1}{2}\left(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2\right)\right)^2$$

$$=\frac{3}{2}\left(t_1-t_2\right)^2\left(t_1t_2+5\right)^2$$

$$=\frac{3}{2}\left(4-2t_1t_2\right)\left(t_1t_2+5\right)\left(t_1t_2+5\right)$$

$$\le\frac{3}{2}\left(\frac{14}{3}\right)^3,$$

所以 $S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$，当且仅当 $\left(t_1-t_2\right)^2=t_1t_2+5$ 且 $t_1^2+t_2^2=4$，即 $t_1=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,

$t_2=-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}\right),B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$ 或

$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\right),B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$ 时等号成立.

所以，ΔABC 面积的最大值是 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$.

11. （20 分）证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，

$$\text{使得}\quad \frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots.$$

证明：令 $f(x)=2x^3+5x-2$，则 $f'(x)=6x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 是严格递增的. 又 $f(0)=-2<0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}>0$，故 $f(x)$ 有唯一实数根 $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\quad 2r^3+5r-2=0$，

$$\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots.$$

故数列 $a_n=3n-2\left(n=1,2,\cdots\right)$ 是满足题设要求的数列.

若存在两个不同的正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ 满足

$$r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5},$$

去掉上面等式两边相同的项，有

$$r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots,$$

这里 $s_1<s_2<s_3<\cdots,t_1<t_2<t_3<\cdots$，所有的 s_i 与 t_j 都是不同的.

不妨设 $s_1<t_1$，则

$$r^{s_1}<r^{s_1}+r^{s_2}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+\cdots,$$

$$1<r^{t_1-s_1}+r^{t_2-s_1}+\cdots\le r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}-1<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1,$$

矛盾. 故满足题设的数列是唯一的.