

海淀区高二年级第一学期期末练习

数 学（理科）

2017.1

学校_____ 班级_____ 姓名_____ 成绩_____

本试卷共 100 分，考试时间 90 分钟。

题号	一	二	三			
			15	16	17	18
分数						

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线 $x - y + 1 = 0$ 的斜率是 ()

- A. 1 B. -1 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

2. 方程 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 表示的圆的圆心和半径分别为 ()

- A. $(-2, 0)$, 2 B. $(-2, 0)$, 4 C. $(2, 0)$, 2 D. $(2, 0)$, 4

3. 若两条直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与 $3x - 6y - 1 = 0$ 垂直，则 a 的值为 ()

- A. 4 B. -4 C. 1 D. -1

4. 在空间直角坐标系中，点 $P(1, 2, -3)$ 关于坐标平面 xOy 的对称点为 ()

- A. $(-1, -2, 3)$ B. $(-1, -2, -3)$ C. $(-1, 2, -3)$ D. $(1, 2, 3)$

5. 已知三条直线 m, n, l ，三个平面 α, β, γ ，下面说法正确的是 ()

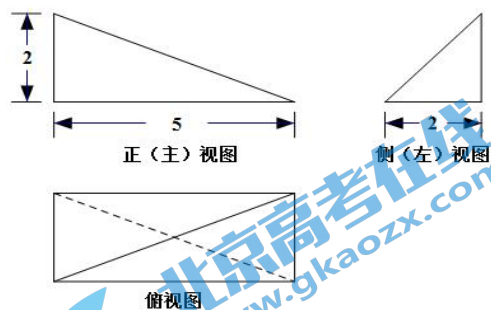
- A. $\left. \begin{matrix} \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$ B. $\left. \begin{matrix} m \perp l \\ n \perp l \end{matrix} \right\} \Rightarrow m // n$
- C. $\left. \begin{matrix} m // \beta \\ l \perp m \end{matrix} \right\} \Rightarrow l // \beta$ D. $\left. \begin{matrix} m // n \\ n \perp \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \perp \gamma$

6. “直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$ ” 是 “直线 l 经过点 $(2, 0)$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 一个三棱锥的三视图如图所示, 则三棱锥的体积为 ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{10}{3}$
C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{25}{3}$



8. 实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0, \\ x \leq 1, \\ y \geq a \end{cases}$, 若 $u = 2x - y$ 的最小值为 -4 , 则实数 a 等于 ()

- A. -4 B. -3 C. -2 D. 6

二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的渐近线方程为 _____.

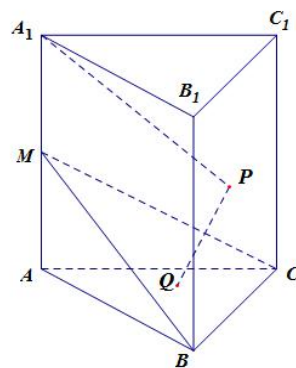
10. 点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的一点, F_1, F_2 分别是椭圆的左右焦点, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是 _____.

11. 已知命题 $p: \forall x > 1, x^2 - 2x + 1 > 0$, 则 $\neg p$ 是 _____.

12. 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(1,0,2), B(2,1,0), C(0,a,1)$, 若 $AB \perp AC$, 则实数 a 的值为 _____.

13. 已知点 P 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, Q 是直线 $l: 3x + 4y - 10 = 0$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 _____.

14. 如图, 在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 M 是侧棱 AA_1 的中点, 点 P, Q 分别是侧面 BCC_1B_1 、底面 ABC 内的动点, 且 $A_1P \parallel$ 平面 BCM , $PQ \perp$ 平面 BCM , 则点 Q 的轨迹的长度为 _____.



三. 解答题: 本大题共 4 小题, 共 44 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 10 分)

已知圆 M 过点 $A(0, \sqrt{3})$, $B(1, 0)$, $C(-3, 0)$.

(I) 求圆 M 的方程;

(II) 过点 $(0, 2)$ 的直线 l 与圆 M 相交于 D 、 E 两点, 且 $|DE| = 2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

扫描二维码, 获取更多期末试题



长按识别关注

16. (本小题满分 10 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 定点 $M(5, 0)$.

(I) 若直线 l 的斜率为 1, 求 $\triangle ABM$ 的面积;

(II) 若 $\triangle AMB$ 是以 M 为直角顶点的直角三角形, 求直线 l 的方程.

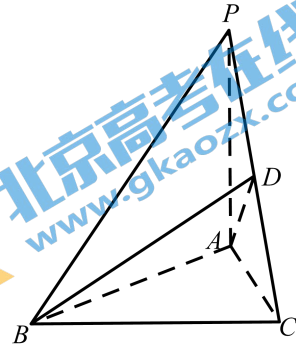


17. (本小题满分 12 分)

如图, 在底面是正三角形的三棱锥 $P-ABC$ 中, D 为 PC 的中点, $PA = AB = 1$,

$$PB = PC = \sqrt{2}.$$

- (I) 求证: $PA \perp$ 平面 ABC ;
- (II) 求 BD 与平面 ABC 所成角的大小;
- (III) 求二面角 $D-AB-C$ 的余弦值.



18. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，右顶点为 A ，上顶

点为 B ， $\triangle BF_1F_2$ 是边长为 2 的正三角形.

(I) 求椭圆 C 的标准方程及离心率;

(II) 是否存在过点 F_2 的直线 l ，交椭圆于两点 P 、 Q ，使得 $PA \parallel QF_1$ ，如果存在，试求直线 l 的方程，如果不存在，请说明理由.

阅卷须知:

- 一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	D	D	A	B	C

9. $y = \pm 2x$

10. 6

11. $\exists x > 1, x^2 - 2x + 1 \leq 0$

12. -1

13. 1

14. $\frac{4}{3}$

15. 解: (I) 设圆 $M: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则

$$\begin{cases} 3 + \sqrt{3}E + F = 0 \\ 1 + D + F = 0 \\ 9 - 3D + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 2 \\ E = 0 \\ F = -3 \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

分)

故圆 $M: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, 即 $(x+1)^2 + y^2 = 4$

(4 分)

(II) 由 (I) 得, $M(-1,0)$.

设 N 为 DE 中点, 则 $MN \perp l$, $|DN| = |EN| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (5)

分)

此

时

$$|MN| = \sqrt{4 - (\sqrt{3})^2} = 1. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

当 l 的斜率不存在时, $l: x=0$, 此时 $|MN|=1$, 符合题意 (7 分)

当 l 的斜率存在时, 设 $l: y=kx+2$, 由题意

$$\frac{|k(-1)+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad \dots\dots\dots$$

(8 分)

解得: $k=\frac{3}{4}$, (9 分)

分)

故直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x+2$, 即 $3x-4y+8=0$ (10 分)

(10 分)

综上直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y+8=0$

16. 解: (I) 解法 1: 由题意 $F(1,0)$, 当 AB 的斜率为 1 时, $l: y=x-1$ (1 分)

分)

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow y^2-4y-4=0 \quad \dots\dots\dots$$

(2 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\Delta=4^2-4\times(-4)>0$

故

$$\begin{cases} y_1+y_2=4 \\ y_1\cdot y_2=-4 \end{cases} \quad \dots\dots\dots$$

(3 分)

有

$$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (4$$

分)

$$S_{\triangle AMB}=S_{\triangle AMF}+S_{\triangle BMF}=\frac{1}{2}\cdot|y_1|\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot|y_2|\cdot 4=2\cdot|y_1-y_2|=8\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots$$

(5 分)

解法 2: 由题意 $F(1,0)$, 当 AB 的斜率为 1 时, $l: y=x-1$ (1 分)

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \dots\dots\dots$$

(2 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) > 0$

$$x_1 + x_2 = 6 \dots\dots\dots,$$

$$|AB| = x_1 + x_2 + 2 = 8 \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

点 M 到 直 线 AB 的 距 离

$$d = \frac{|5-1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(II) 解法 1: 易得, 直线 l 的斜率不为零, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 4 = 0 \dots\dots\dots$$

\dots\dots\dots (6 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$, 得

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 \cdot y_2 = -4 \end{cases} \dots\dots\dots$$

\dots\dots\dots (7 分)

$$\text{由 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \text{ 得 } (x_1 - 5)(x_2 - 5) + y_1 y_2 = 0, \dots\dots\dots$$

(8 分)

$$\text{即 } (my_1 - 4)(my_2 - 4) + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{整理得, } (m^2 + 1)y_1 y_2 - 4m(y_1 + y_2) + 16 = 0$$

$$\text{此时有: } (m^2 + 1) \cdot (-4) - 4m \cdot (4m) + 16 = 0, \text{ 解得 } m = \pm \frac{\sqrt{15}}{5} \dots\dots\dots (9$$

分)

故 l 的方程为

$$x = \frac{\sqrt{15}}{5}y + 1 \text{ 或 } x = -\frac{\sqrt{15}}{5}y + 1$$

即 $5x - \sqrt{15}y - 5 = 0$ 或

$$5x + \sqrt{15}y - 5 = 0 \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

解法 2: 易知直线 $l \perp x$ 时不符合题意. 可设直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$.

$$\begin{cases} y = k(x-1), \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

消去 y , 可得 $k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 = 0$. $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

则 $\Delta = 16(k^2+1) > 0$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{k^2}, \quad x_1x_2 = 1. \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

由 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 得 $(x_1-5)(x_2-5) + y_1y_2 = 0$, $\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

即: $x_1x_2 - 5(x_1+x_2) + 25 - 4\sqrt{x_1x_2} = 0$,

即: $1 - 5(2 + \frac{4}{k^2}) + 25 - 4 = 0$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$. $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

故 l 的方程为 $\sqrt{5}x - \sqrt{3}y - \sqrt{5} = 0$ 或 $\sqrt{5}x + \sqrt{3}y - \sqrt{5} = 0$.

$\dots\dots\dots$
(10 分)

17.解: (I) $\because PA = AB = 1, PB = \sqrt{2}$,

$\therefore$

$PA \perp AB \quad \dots\dots\dots$

(1 分)

$\because$ 底面是正三角形

$\therefore AC = AB = 1$

$\therefore PC = \sqrt{2}$

$\therefore$

$PA \perp AC \quad \dots\dots\dots$

(2 分)

$\therefore AB \cap AC = A$

$AB, AC \subset \text{平面 } ABC$

$\therefore PA \perp$ 平面 ABC .

(3 分)

(II) 以 A 为原点, AB 为 x 轴, AP 为 z 轴, 平面 ABC 中垂直于 AB 的直线为 y 轴建立

空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $P(0,0,1)$

(4 分)

所

以

$$D(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{BD} = (-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}). \quad (5 \text{ 分})$$

平面 ABC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (0,0,1)$,

(6 分)

记 BD 与平面 ABC 所成的角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{1}{2}$$

(7 分)

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}.$$

(8 分)

(III) 设平面 ABD 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x,y,z)$,

由

$$\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{AD}$$

得

:

$$\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{2}z = 0, \quad (9 \text{ 分})$$

由 $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{AB}$ 得: $x=0$

代入上式得: $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}y$.

(10 分)

令 $y=2$, 则 $z = -\sqrt{3}$, 因而, $\vec{n}_2 = (0,2,-\sqrt{3})$.

(11 分)

记二面角 $D-AB-C$ 的大小为 α ，则 $\cos \alpha = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 。..... (12

分)

18. 解: (I) 由题意可得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$ (2 分)

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, (3 分)

椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ (4 分)

(II) 解法 1: 由 (I) 得, $F_1(-1, 0), F_2(1, 0), A(2, 0)$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

显然直线 l 的斜率不为零, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 则 (5

分)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow 3(my+1)^2 + 4y^2 = 12 \dots\dots\dots (6$$

分)

整理得: $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$, 此时 $\Delta = 144m^2 + 144 > 0$, 故

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_1 \cdot y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4} \end{cases} \dots\dots\dots$$

... (7 分)

注意到 $\vec{AP} = (x_1 - 2, y_1) = (my_1 - 1, y_1)$, $\vec{F_1Q} = (x_2 + 1, y_2) = (my_2 + 2, y_2)$

..... (8 分)

若 $PA \parallel QF_1$, 则 $(my_1 - 1) \cdot y_2 = (my_2 + 2) \cdot y_1$, 即 $y_2 = -2y_1$ (9

分)

$$\text{此时由} \begin{cases} y_2 = -2y_1 \\ y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_2 = -\frac{12m}{3m^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow y_1 y_2 = -\frac{72m^2}{(3m^2 + 4)^2},$$

(10 分)

$$\text{故 } -\frac{72m^2}{(3m^2+4)^2} = -\frac{9}{3m^2+4}, \text{ 解得 } 5m^2 = 4, \text{ 即 } m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots\dots (11$$

分)

$$\text{故 } l \text{ 的方程为 } x = \frac{2}{\sqrt{5}}y + 1 \text{ 或 } x = -\frac{2}{\sqrt{5}}y + 1,$$

$$\text{即} \quad \sqrt{5}x - 2y - \sqrt{5} = 0 \quad \text{或}$$

$$\sqrt{5}x + 2y - \sqrt{5} = 0 \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

解法 2: 由 (I) 得 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, $A(2,0)$.

$$\text{直线 } l \perp x \text{ 时, } \frac{|PF_2|}{|QF_2|} = 1 \neq \frac{|AF_2|}{|F_1F_2|}, \text{ 则 } PA // QF_1 \text{ 不成立, 不符合题意.}$$

..... (5 分)

可 设 直 线 l 的 方 程 为

$$y = k(x-1). \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{消去 } y, \text{ 可得 } (4k^2+3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \Delta = 144(k^2+1) > 0. \text{ 设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2+3} \text{ ①}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3} \text{ ②} \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\overrightarrow{AP} = (x_1-2, y_1), \quad \overrightarrow{F_1Q} = (x_2+1, y_2).$$

$$\text{若 } PA // QF_1, \text{ 则 } \overrightarrow{AP} // \overrightarrow{F_1Q},$$

$$\text{则 } k(x_1-2)(x_2-1) - k(x_2+1)(x_1-1) = 0.$$

$$\text{化简得 } 2x_1 + x_2 - 3 = 0 \text{ ③.} \quad \dots\dots\dots (9$$

分)

$$\text{联立 ①③ 可得 } x_1 = \frac{4k^2+9}{4k^2+3}, \quad x_2 = \frac{4k^2-9}{4k^2+3}, \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

代入②可以解得 $k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (11

分)

故 l 的方程为 $\sqrt{5}x - 2y - \sqrt{5} = 0$ 或 $\sqrt{5}x + 2y - \sqrt{5} = 0$ (12 分)

