

2018 北京十一学校高二（上）期末

数 学 II（理）

2018.1

本试卷共 8 页, 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、填空题(共 15 道小题, 1-5 每小题 3 分, 6-15 每小题 4 分, 共 55 分)

1. 下面说法正确的是 _____.

①长方体的八个顶点在同一个球面上, 此时长方体称为球的内接长方体, 球是长方体的外接球, 并且长方体的对角线是球的直径;

②一球与正方体的所有棱相切, 则正方体每个面上的对角线长等于球的直径;

③一球与正方体的所有面相切, 则正方体的棱长等于球的直径.

2. 在球内有相距 9cm 的两个平行截面, 面积分别为 $49\pi\text{cm}^2$ 和 $400\pi\text{cm}^2$, 则此球的半径为 _____.

3. 已知异面直线 a 与 b 所成的角 $\theta = 70^\circ$, P 为空间一点, 则过 P 点与 a 和 b 所成角 $\phi = 45^\circ$ 的直线有 _____ 条, 过 P 点与 a 和 b 所成角 $\phi = 35^\circ$ 的直线有 _____ 条, 过 P 点与 a 和 b 所成角 $\phi = 70^\circ$ 的直线有 _____ 条.

4. 设 l, m, n 表示不同的直线, α, β, γ 表示不同的平面, 给出下列四个命题, 其中正确的序号是 _____.

①若 $m // l$, 且 $m \perp \alpha$, 则 $l \perp \alpha$;

②若 $m // l$, 且 $m // \alpha$, 则 $l // \alpha$;

③若 $\alpha \cap \beta = l, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n$, 则 $l // m // n$;

④若 $\alpha \cap \beta = m, \beta \cap \gamma = l, \gamma \cap \alpha = n$, 且 $n // \beta$, 则 $l // m$.

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 点 O 是点 P 在底面 ABC 内的射影.

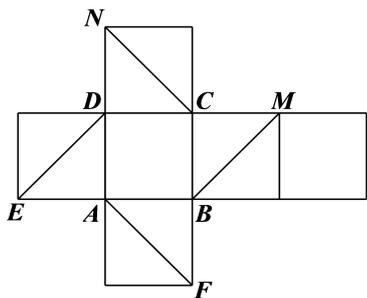
①若 $PA = PB = PC$, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 _____ 心;

②若 $PA \perp BC, PB \perp AC$, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 _____ 心;

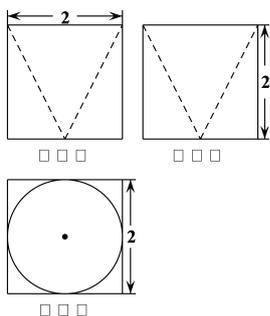
③若侧面 PAB, PBC, PAC 与底面 ABC 所成的二面角相等, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 _____ 心.

6. 如图是正方体的平面展开图, 在这个正方体中, 下列四个命题正确的序号是 _____.

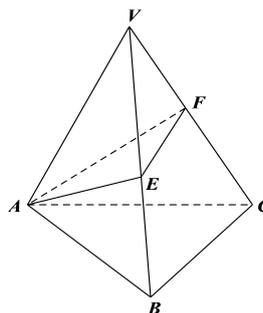
- ①直线 BM 与直线 ED 平行; ②直线 CN 与直线 BE 是异面直线;
③直线 AF 与平面 BDM 平行; ④平面 CAN 与平面 BEM 平行.



第 6 题图



第 7 题图

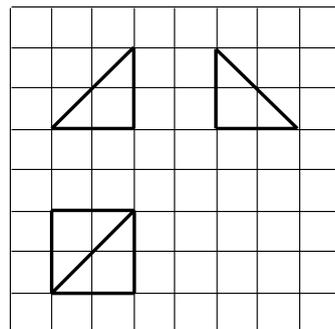


第 8 题图

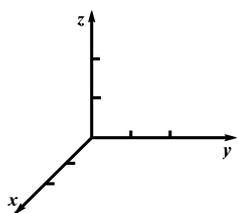
7. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积是 _____.

8. 如图所示, 侧棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正三棱锥 $V-ABC$ 中, $\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = 40^\circ$, 过 A 作截面 AEF , 则截面 $\triangle AEF$ 周长的最小值等于 _____.

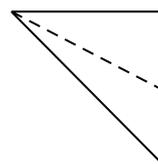
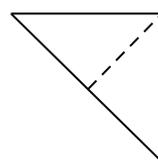
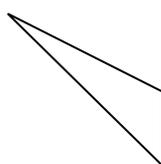
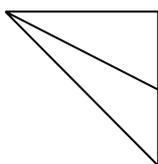
9. 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 在其上用粗线画出了某多面体的三视图, 则这个多面体最长的一条棱的长为 _____.



10. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 一个四面体的顶点坐标分别是 $(0,0,2), (2,2,0), (1,2,1), (2,2,2)$. 给出编号为①, ②, ③, ④的四个图, 则该四面体的正视图和左视图分别为 _____, _____.



- ①
②
③
④



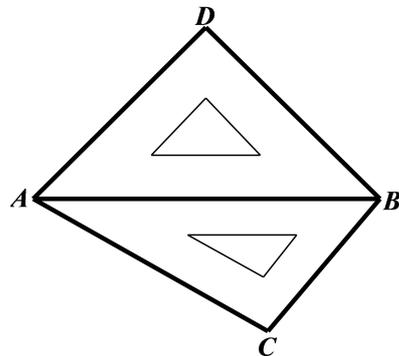
11. 将一副斜边长相等的直角三角板拼接成如图所示的空间图形, 其中 $AD = BD = \sqrt{2}$, $\angle BAC = 30^\circ$, 若他们的斜边 AB 重合, 让三角板 ABD 以 AB 为轴转动, 则下列说法正确的是 _____.

①当平面 ABC 时, C 、 D 两点间的距离为 $\sqrt{2}$;

②在三角板 ABD 转动过程中, 总有 $AB \perp CD$;

③在三角板 ABD 转动过程中, 三棱锥 $D-ABC$ 体积

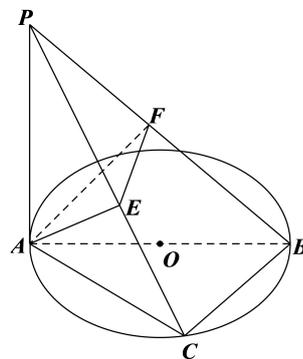
的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



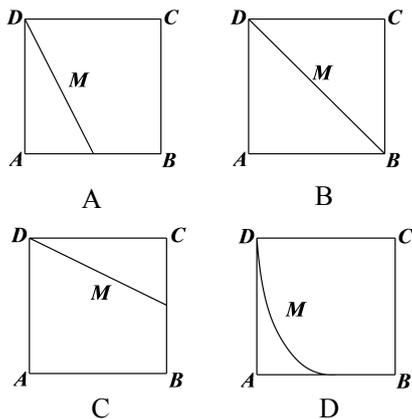
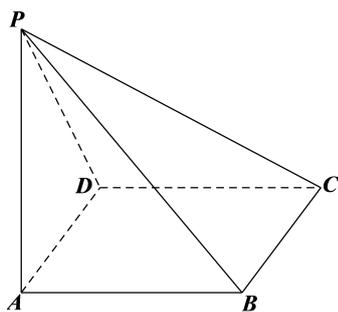
12. 如图, PA 垂直于圆 O 所在的平面, AB 是圆 O 的直径, C 是圆 O 上一点, $AE \perp PC, AF \perp PB$, 给出下列结论, 其中真命题的序号有 _____.

① $AE \perp BC$; ② $EF \perp PB$;

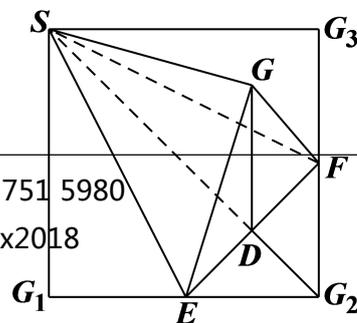
③ $AF \perp BC$; ④ $AE \perp$ 平面 PBC .



13. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为正三角形, 底面 $ABCD$ 为边长为1的正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为底面 $ABCD$ 内的一个动点, 且满足 $MP = MC$, 则点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为 _____.

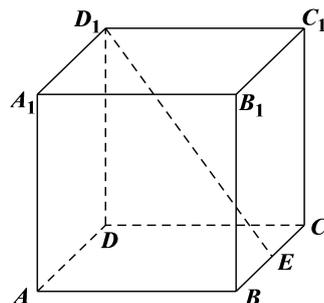


14. 如图, 正方形 $SG_1G_2G_3$ 中, E, F 分别是 G_1G_2, G_2G_3 的中点, 现沿 SE, SF 及 EF 把这个正方形折成一个几何体, 使 G_1, G_1, G_3 三点重合于点 G . 下列五个结论中, 正确的是 _____.



- ① $SG \perp$ 平面 EFG ;
- ② $SD \perp$ 平面 EFG ;
- ③ $GF \perp$ 平面 SEF ;
- ④ $EF \perp$ 平面 GSD ;
- ⑤ $GD \perp$ 平面 SEF .

15. 如图, 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BC 的中点, 点 P 在正方体的表面上移动, 且满足 $B_1P \perp D_1E$, 则点 P 形成的轨迹图形的周长是 _____ .



二、解答题(共 4 小题, 共 45 分. 要求有推理计算过程)

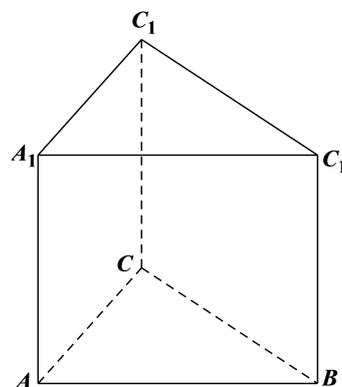
16. (本小题满分 8 分)

证明: 如果一个角所在平面外一点与角的顶点的连线与角的两边所成的角相等, 那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上.

17. (本小题满分 12 分)

如图, 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 2, 底面 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 2$, D 是 AA_1 的中点.

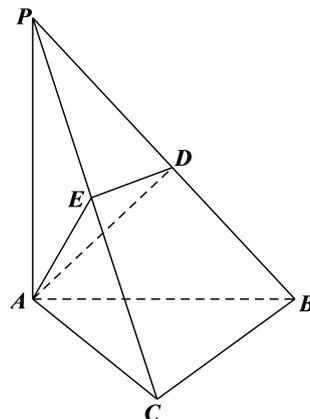
- (I) 求异面直线 AB 和 C_1D 所成的角 (用反三角函数表示);
- (II) 若 E 为线段 AB 上一点, 试确定点 E 在 AB 上的位置, 使得 $A_1E \perp C_1D$;
- (III) 在 (II) 的条件下, 求点 D 到平面 B_1C_1E 的距离.



18. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,底面 ABC , $PA=AB$, $\angle BC=60^\circ$, $\angle BCA=90^\circ$, 点 D 、 E 分别在棱 PB , PC 上, 且 $DE \parallel BC$.

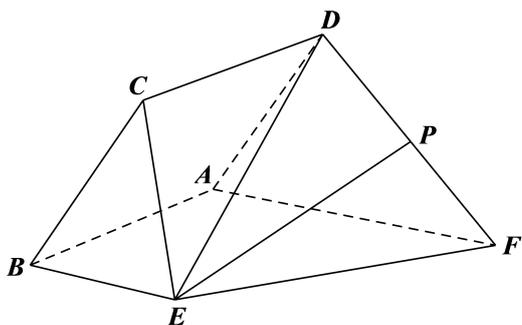
- (I) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC ;
- (II) 当 D 为 PB 的中点时, 求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小;
- (III) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角? 并说明理由.



19. (本小题满分 13 分)

如图, 已知菱形 $ABCD$ 与直角梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直, 其中 $BE \parallel AF$, $AB \perp AF$, $AB = BE = \frac{1}{2}AF = 2$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$, P 为 DF 的中点.

- (I) 求证: $PE \parallel$ 平面 $ABCD$;
- (II) 求二面角 $D-EF-A$ 的余弦值;
- (III) 设 G 为线段 AD 上一点, $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}$, 若直线 FG 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{26}$, 求 λ 的值.



数学试题答案

一、填空题:本大题共 15 小题, 1-5 每小题 3 分, 6-15 每小题 4 分共 55 分.

1. ①②③

2. $25cm$

3. 2;1;4

4. ①④

5. 外;垂;内

6. ③④

7. $8 - \frac{2}{3}\pi$

8. 6

9. $2\sqrt{3}$

10. ④;③

11. ①③

12. ①②④

13. A

14. ①④

15. $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$

二、解答题:

16. (本小题满分 8 分)

已知: 如图, 点 P 为 $\angle BAC$ 所在平面外一点, $PD \perp AC$ 于 D , $PE \perp AB$ 于 E , $PD = PE$, $PG \perp$ 平面 ABC 于 G .

证明: 连结 GE, GD .

$\because PG \perp$ 平面 ABC , $EG, DG \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore PG \perp EG, PG \perp DG$,

又 $\because PD = PE, PG = PG$,

$\therefore \triangle PEG \cong \triangle PDG, \therefore GE = GD$,

$\because PG \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore EG$ 为 PE 在平面 ABC 内的射影,

又 $\because AB \perp PE, \therefore AB \perp EG$,

同理 $AC \perp DG$,

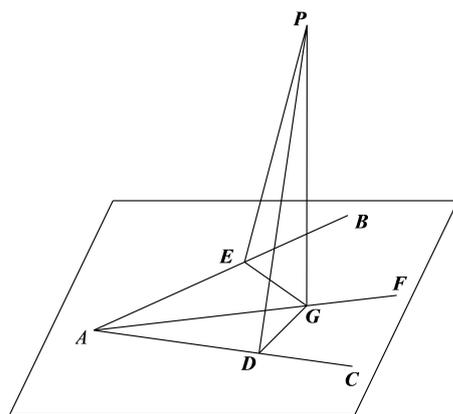
$\therefore \triangle AGE \cong \triangle AGD, \therefore \angle EAG = \angle DAG$,

$\therefore AG$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线.

17. (本小题满分 12 分)

(I) 以 C 为坐标原点, CB, CA, CC_1 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0, 2, 0), A_1(0, 2, 2), B(2, 0, 0), C_1(0, 0, 2), D(0, 2, 1)$,



$$\therefore \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0), \overrightarrow{C_1D} = (0, 2, -1).$$

\therefore 异面直线 AB 与 C_1D 所成的角为向量 \overrightarrow{AB} 与向量 $\overrightarrow{C_1D}$ 的夹角或其补角.

设 \overrightarrow{AB} 与 $\overrightarrow{C_1D}$ 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{-4}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\theta = \pi - \arccos \frac{\sqrt{10}}{5},$$

即异面直线 AB 与 C_1D 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$.

(II) 设 E 点的坐标为 $(x, y, 0)$,

要使得 $A_1E \perp C_1D$, 只要 $\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{C_1D} = 0$,

$$\therefore \overrightarrow{A_1E} = (x, y-2, -2), \overrightarrow{C_1D} = (0, 2, -1), y=1,$$

又 \therefore 点 E 在 AB 上,

$$\therefore \overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = (x, y-2, 0), \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0),$$

$$\therefore x=1, E(1, 1, 0),$$

$\therefore E$ 点为 AB 的中点.

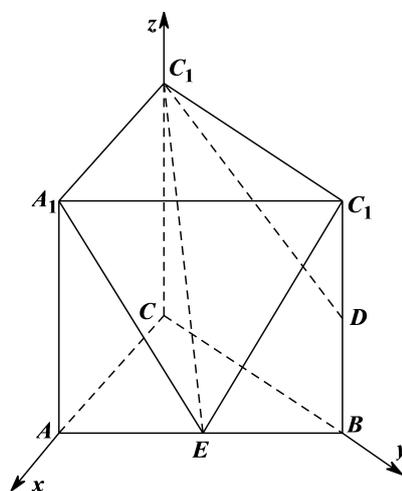
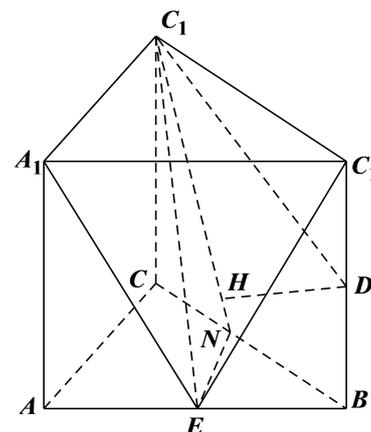
(III) 取 AC 中点 N , 连接 EN, C_1N , 则 $EN \parallel B_1C_1$.

$\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C , \therefore 平面 $B_1C_1NE \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

过点 D 作 $DH \perp C_1N$, 垂足为 H , 则 $DH \perp$ 平面 B_1C_1NE ,

$\therefore DH$ 的长度即为点 D 到平面 B_1C_1E 的距离.

在正方形 AA_1C_1C 中, 由计算知 $DH = \frac{3\sqrt{5}}{5}$,



即点 D 到平面 B_1C_1E 的距离为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

18. (本小题满分 12 分)

解: (I) $\because PA \perp$ 底面 ABC ,

$\therefore PA \perp BC$,

又 $\angle BCA = 90^\circ$, $\therefore AC \perp BC$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

(II) $\because D$ 为 PB 的中点, $DE \parallel BC$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$.

又由 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC ,

$\therefore \angle DAE$ 是 AD 与平面 PAC 所成的角,

$\because PA \perp$ 底面 ABC , $\therefore PA \perp AB$.

又 $PA = AB$, $\therefore \triangle ABP$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AD = \frac{1}{\sqrt{2}}AB$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$,

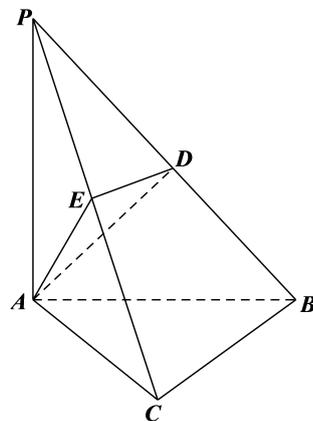
$\therefore BC = \frac{1}{2}AB$,

\therefore 在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\sin \angle DAE = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{2AD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

即 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(III) $\because DE \parallel BC$, 又有 (I) 知, $BC \perp$ 平面 PAC ,

$\therefore DE \perp$ 平面 PAC .



专注北京高考升学

又 $\because AE \subset \text{平面 } PAC, PE \subset \text{平面 } PAC,$

$\therefore DE \perp AE, DE \perp PE,$

$\therefore \angle AEP$ 为二面角 $A-DE-P$ 的平面角,

$\because PA \perp \text{底面 } ABC, \therefore PA \perp AC,$

$\therefore \angle PAC = 90^\circ,$

\therefore 在棱 PC 上存在一点 E , 使得 $AE \perp PC.$

这时 $\angle AEP = 90^\circ,$

故存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 是直二面角.

19. (本小题满分 13 分)

解: (I) 取 AD 的中点 M , 连接 $PM, BM,$

$\because P$ 是 DF 的中点, M 是 AD 的中点,

$\therefore PM \parallel AF, PM = \frac{1}{2}AF,$

又 $BE \parallel AF, BE = \frac{1}{2}AF, BE \parallel PM, BE = PM,$

\therefore 四边形 $BEPM$ 是平行四边形,

$\therefore PE \parallel BM,$ 又 $PE \not\subset \text{平面 } ABCD, BM \subset \text{平面 } ABCD,$

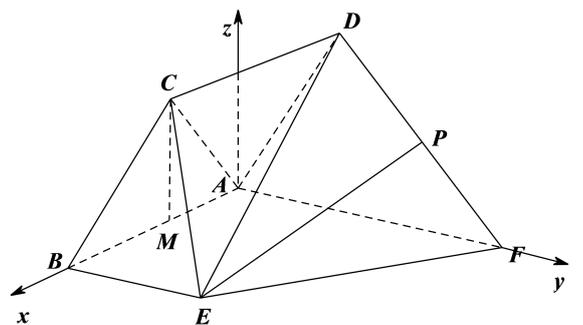
$\therefore PE \parallel \text{平面 } ABCD.$

(II) 取 AB 中点 M , 连接 $AC, CM,$

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC, \angle CBA = \frac{\pi}{3},$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore CM \perp AB,$

又 $\because \text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } ABEF = AB,$



$\therefore CM \perp$ 平面 $ABEF$,

又 $\because AB \perp AF$, $\therefore AB \perp$ 平面 DAF , $AF \perp$ 平面 $ABCD$,

\therefore 以 A 为原点, 作 $Az \parallel MC$ 建立如图所示的空间直角坐标系,

设 $AB=1$, 则 $A(0,0,0), B(2,0,0), E(2,2,0), C(1,0,\sqrt{3}), D(-1,0,\sqrt{3}), F(0,4,0)$,

$\therefore \overrightarrow{DE} = (3, 2, -\sqrt{3}), \overrightarrow{DF} = (1, 4, -\sqrt{3})$,

设平面 DEF 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 3x + 2y - \sqrt{3}z = 0 \\ x + 4y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$,

令 $z=1$, 则 $y = \frac{\sqrt{3}}{5}, z = \frac{\sqrt{3}}{5}$,

故 $\vec{n} = (\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}, 1)$ 为平面 DEF 的一个法向量, 又因为 $AF \perp$ 平面 $ABCD$,

故 \overrightarrow{AF} 为平面 $ABCD$ 的一个法向量, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{39}}{31}$,

平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{31}$.

(III) 过 G 作 $GH \perp BA$, 交 BA 延长线于 H , 连接 FH, FG ,

\because 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB, GH \perp AB, GH \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore GH \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore \angle GFH$ 位置线 FG 与平面 $ABEF$ 所成角.

$\because \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}, \therefore AG = 2\lambda$,

$\because \angle CBA = \angle DAH = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore GH = AG \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\lambda, AH = AG \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \lambda$,

$\therefore HF = \sqrt{AF^2 + AH^2} = \sqrt{16 + \lambda^2}$,

$$FG = \sqrt{GH^2 + FH^2} = 2\sqrt{4 + \lambda^2},$$

$$\sin \angle GFH = \frac{GH}{FG} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{4 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{39}}{26},$$

计算得出 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按识别二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao
官方网址：www.gaokzx.com
咨询热线：010-5751 5980