2022 北京丰台高三一模

数　学

2022.03

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x\le 2\}$，$B=\{x\mid -2<x\le 1\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $\{x\mid -1<x<1\}$　　B. $\{x\mid -1<x\le 1\}$　　C. $\{x\mid -2<x<2\}$　　D. $\{x\mid -2<x\le 2\}$

2. 已知命题 p：$\exists x>1$，$x^2-1>0$，那么 $\neg p$　（　）

A. $\forall x>1$，$x^2-1>0$　　B. $\forall x>1$，$x^2-1\le 0$

C. $\exists x>1$，$x^2-1\le 0$　　D. $\exists x\le 1$，$x^2-1\le 0$

3. 若复数 $z=a+b\mathrm{i}$（a，b 为实数）则"$a=0$"是"复数 z 为纯虚数"的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 已知圆 $C:x^2-2x+y^2=0$，则圆心 C 到直线 $x=3$ 的距离等于（　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n$，且 $a_4=1$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和等于（　）

A. 15　　B. 14　　C. $\dfrac{15}{8}$　　D. $\dfrac{7}{8}$

6. 在△ABC 中，$a=2,b=3,\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，则 $\angle A=$（　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$

7. 在抗击新冠疫情期间，有 3 男 3 女共 6 位志愿者报名参加某社区"人员流调"、"社区值守"这两种岗位的志愿服务，其中 3 位志愿者参加"人员流调"，另外 3 位志愿者参加"社区值守"．若该社区"社区值守"岗位至少需要 1 位男性志愿者．则这 6 位志愿者不同的分配方式共有（　）

A. 19 种　　B. 20 种　　C. 30 种　　D. 60 种

8. 已知 F 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的一个焦点，点 M 在双曲线 C 的一条渐近线上，O 为坐标原点．若 $|OM|=|MF|$，则△OMF 的面积为（　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 6

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2x, x<a,\\ x^3-3x, x\ge a\end{cases}$ 无最小值，则 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-1)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

10. 对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，若递增数列 $\{a_n\}$ 中不大于 $2m$ 的项的个数恰为 m，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则 n 的最小值为（　）

A. 8　　　　B. 9　　　　C. 10　　　　D. 11

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

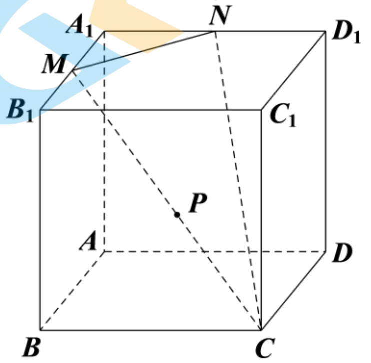
11. 函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}+\lg x$ 的定义域是________.

12. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(x,-6)$. 若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 x=______.

13. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，能说明“若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$，则函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增“为假命题的一个函数是__________.

14. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，则 F 的坐标为______；设点 M 在抛物线 C 上，若以线段 FM 为直径的圆过点 $(0,2)$，则 $|FM|=$______.

15. 如图，在棱长为 2 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，点 P 在线段 CM 上运动，给出下列四个结论：



①平面 CMN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形是五边形；

②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

③存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1$=90°；

④△ PDD_1 面积的最小值是 $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为一组已知条件，使 $f(x)$ 的解析式唯一确定.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）设函数 $g(x)=f(x)+f(x+\dfrac{\pi}{6})$，求 $g(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最大值.

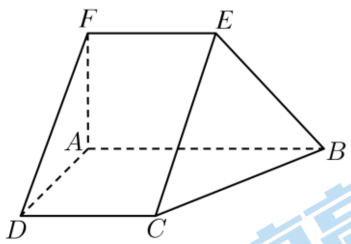
条件①：$f(x)$ 的最小正周期为 π；

条件②：$f(x)$ 为奇函数；

条件③：$f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle DAB=90^\circ$，$AD=DC=\dfrac{1}{2}AB$．以直线 AB 为轴，将直角梯形 $ABCD$ 旋转得到直角梯形 $ABEF$，且 $AF\perp AD$.



（1）求证：$DF \parallel$ 平面 BCE；

（2）在线段 DF 上是否存在点 P，使得直线 AE 和平面 BCP 所成角的正弦值为 $\dfrac{5}{6}$？若存在，求出 $\dfrac{DP}{DF}$ 的值；若不存在，说明理由.

18. 为研究某地区 2021 届大学毕业生毕业三个月后的毕业去向，某调查公司从该地区 2021 届大学毕业生中随机选取了 1000 人作为样本进行调查，结果如下：

毕业去向	继续学习深造	单位就业	自主创业	自由职业	慢就业
人数	200	560	14	128	98

假设该地区 2021 届大学毕业生选择　毕业去向相互独立.

（1）若该地区一所高校 2021 届大学毕业生的人数为 2500，试根据样本估计该校 2021 届大学毕业生选择“单位就业”的人数；

（2）从该地区 2021 届大学毕业生中随机选取 3 人，记随机变量 X 为这 3 人中选择“继续学习深造”的人数．以样本的频率估计概率，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（3）该公司在半年后对样本中的毕业生进行再调查，发现仅有选择“慢就业”的毕业生中的 a $(0<a<98)$ 人选择了上表中其他的毕业去向，记此时表中五种毕业去向对应人数的方差为 s^2．当 a 为何值时，s^2 最小．（结论不要求证明）

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右顶点分别为 A，$B$，且 $|AB|=4$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 P 是椭圆 C 上不同于 A，B 的一点，直线 PA，PB 与直线 $x=4$ 分别交于点 M，N．若 $|MN|\leqslant 4$，求点 P 横坐标的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=x\sqrt{a-x}$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-\frac{2a}{3}$ 恰有两个不同的零点，求 a 的取值范围.

21. 已知集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geq 3$ 且 $n\in N^*$），$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $A\subseteq S$．若对任意 $a_i\in A,a_j\in A$（$1\leq i\leq j\leq m$），当 $a_i+a_j\leqslant n$ 时，存在 $a_k\in A$（$1\leq k\leq m$），使得 $a_i+a_j=a_k$，则称 A 是 S 的 m 元完美子集.

（1）判断下列集合是否是 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的 3 元完美子集，并说明理由；

① $A_1=\{1,2,4\}$；　　② $A_2=\{2,4,5\}$．

（2）若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,7\}$ 的 3 元完美子集，求 $a_1+a_2+a_3$ 的最小值；

（3）若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geq 3$ 且 $n\in N^*$）的 m 元完美子集，求证：

$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant\frac{m(n+1)}{2}$，并指出等号成立的条件.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】D

【解析】

【分析】利用并集的定义计算即可.

【详解】∵集合 $A=\{x|-1<x\le 2\}$，$B=\{x|-2<x\le 1\}$，

∴ $A\cup B=\{x|-2<x\le 2\}$.

故选：D.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】由特称命题的否定，直接判断得出答案.

【详解】解：已知命题 p：$\exists x>1$，$x^2-1>0$，

则 $\neg p$ 为：$\forall x>1$，$x^2-1\le 0$.

故选：B.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据当 $a=0$ 且 $b\ne 0$ 时，复数 $z=a+bi$ z 为纯虚数判断即可.

【详解】解：根据复数的概念，当 $a=0$ 且 $b\ne 0$ 时，复数 $z=a+bi$ z 为纯虚数，

反之，当复数 $z=a+bi$ z 为纯虚数时，$a=0$ 且 $b\ne 0$

所以“$a=0$”是“复数 z 为纯虚数”的必要不充分条件

故选：B

4. 【答案】C

【解析】

【分析】求出圆心的坐标，即可求得圆心 C 到直线 $x=3$ 的距离.

【详解】圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，圆心为 $C(1,0)$，故圆心 C 到直线 $x=3$ 的距离为 $|1-3|=2$.

故选：C.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】由等比数列定义和通项公式可得 a_1，然后由前 n 项和公式可得.

【详解】因为 $a_{n+1}=2a_n$，且 $a_4=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列，又 $a_4=a_1q^3=1$，得 $a_1=\frac{1}{8}$，所以

$$S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{\frac{1}{8}(1-2^4)}{1-2}=\frac{15}{8}.$$

故选：C

6.【答案】A

【解析】

【分析】先求出$\sin B$，再借助正弦定理求解即可.

【详解】由$\cos B=\frac{\sqrt{7}}{4}$得$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\frac{3}{4}}$，解得

$\sin A=\frac{1}{2}$，又$a<c$，故$\angle A<\angle C$，$\angle A=\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

7.【答案】A

【解析】

【分析】利用对立事件，用总的分配方式减去“社区值守”岗位全是女性的情况可得.

【详解】6位志愿者3位志愿者参加“人员流调”，另外3位志愿者参加“社区值守”的分配方式共有$C_6^3=20$种，“社区值守”岗位全是女性的分配方式共1种，故“社区值守”岗位至少需要1位男性志愿者的分配方式共有$20-1=19$种.

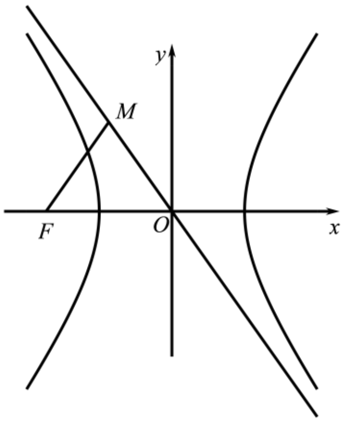
故选：A

8.【答案】C

【解析】

【分析】由等腰三角形的性质结合渐近线方程得出点$M(x_0,y_0)$的坐标，再求面积.

【详解】不妨设F为双曲线C的左焦点，点$M(x_0,y_0)$在渐近线$y=-\sqrt{2}x$上，因为$a=2,b=2\sqrt{2},c=2\sqrt{3}$，$|OM|=|MF|$，所以$x_0=-\sqrt{3}$，$y_0=\sqrt{6}$，即$\triangle OMF$的面积$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$.



故选：C

9.【答案】D

【解析】

【分析】利用导数研究函数的性质，作出函数$y=x^3-3x$与直线$y=-2x$的图象，利用数形结合即得.

【详解】对于函数$y=x^3-3x$，

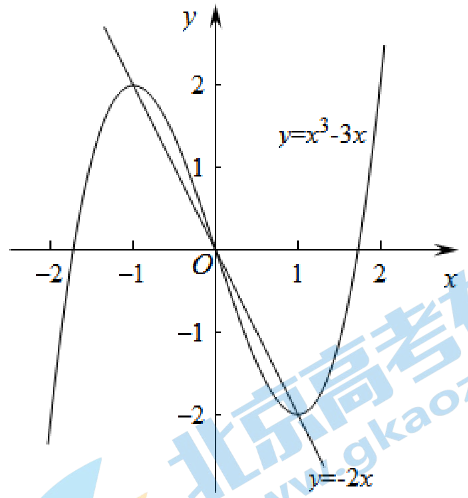
可得$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

由 $y'>0$，得 $x<-1$ 或 $x>1$，由 $y'<0$，得 $-1<x<1$，

$\therefore$函数 $y=x^3-3x$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore$函数 $y=x^3-3x$ 在 $x=-1$ 时有极大值 2，在 $x=1$ 时有极小值 -2，

作出函数 $y=x^3-3x$ 与直线 $y=-2x$ 的图象，



由图可知，当 $a\le 1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有最小值 $f\left(1\right)=-2$，当 $a>1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 没有最小值.

故选：D.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】先由条件得出 $a_n\le 2n$，进而结合等差数列前 n 项和列出不等式，解不等式即可.

【详解】由递增数列 $\left\{a_n\right\}$ 中不大于 $2m$ 的项的个数恰为 m 可知 $a_n\le 2n$，又 $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，故 $2+4+6+\cdots+2n\ge 100$，即 $\dfrac{\left(2+2n\right)n}{2}\ge 100$，解得 $n\le\dfrac{-1-\sqrt{401}}{2}$ 或 $n\ge\dfrac{-1+\sqrt{401}}{2}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，故 n 的最小值为 10.

故选：C.

11. 【答案】$\{x\,|\,0<x\le 2\}$

【解析】

【详解】$\because$函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}+\lg x$

$\therefore$要使函数有意义，则 $\begin{cases}2-x\ge 0\\ x>0\end{cases}$

$\therefore 0<x\le 2$

$\therefore$函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}+\lg x$ 的定义域为 $\left\{x\middle|0<x\le 2\right\}$

故答案为 $\left\{x\middle|0<x\le 2\right\}$

12. 【答案】4

【解析】

【分析】利用两向量共线的条件即求.

【详解】∵向量$\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(x,-6)$，$\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}$，

∴$(-2)\times(-6)-3x=0$，解得$x=4$.

故答案为：4.

13.【答案】$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$，$x\in[0,1]$，（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据题意，可以构造在定义域为$[0,1]$上，先减后增的函数，满足最大值为1，即可得答案.

【详解】根据题意，要求函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$，在$[0,1]$上的最大值为$f(1)$，但$f(x)$在$[0,1]$上不是增函数，

可以考虑定义域为$[0,1]$上，先减后增的函数的二次函数，

函数$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$，$x\in[0,1]$符合，

故答案为：$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$，$x\in[0,1]$，（答案不唯一）.

14.【答案】 ①. $(1,0)$ ②. 5

【解析】

【分析】由题可得$F(1,0)$，设$M(x,y)$，结合条件可得$x-2y+4=0$，$y^2=4x$，进而可得$x=4$，即得.

【详解】∵抛物线$C:y^2=4x$，

∴$F(1,0)$，设$M(x,y)$，则$y^2=4x$，

又以线段FM为直径的圆过点$(0,2)$，

∴$\dfrac{y-2}{x-0}\cdot\dfrac{2-0}{0-1}=-1$，即$x-2y+4=0$，又$y^2=4x$，

∴$\dfrac{y^2}{4}-2y+4=0$，解得$y=4$，$x=4$，

∴$|FM|=4+1=5$.

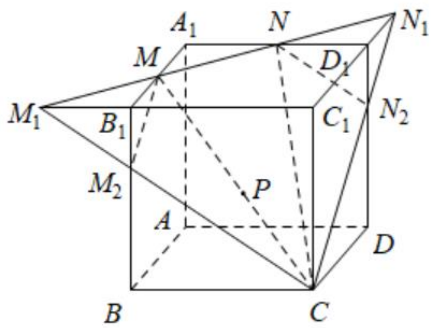
故答案为：$(1,0)$；5.

15.【答案】①③

【解析】

【分析】作出截面图形判断①，利用等积法可判断②，利用坐标法可判断③④.

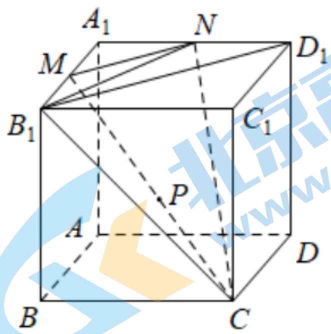
【详解】对于①，如图直线MN与C_1B_1、C_1D_1的延长线分别交于M_1,N_1，连接CM_1,CN_1分别交BB_1,DD_1于M_2,N_2，连接MM_2,NN_2，



则五边形 MM_2CN_2N 即为所得的截面图形，故①正确；

对于②，由题可知 $MN//B_1D_1$，$MN\subset$平面CMN，$B_1D_1\not\subset$平面CMN，

$\therefore B_1D_1//$平面CMN，故点 B_1 到平面 CMN 的距离即为直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离，



设点 B_1 到平面 CMN 的距离为 h，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2 可得，

$$CM=CN=3, MN=\sqrt{2}，\ S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}，$$

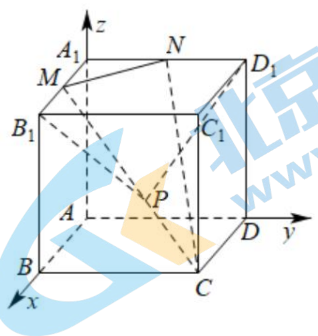
$$\therefore V_{B_1-CMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle CMN}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times h=\frac{\sqrt{17}}{6}h，$$

$$V_{C-B_1MN}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1MN}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}，$$

$\therefore$由 $V_{B_1-CMN}=V_{C-B_1MN}$，可得 $h=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，

所以直线 B_1D_1 到平面 CMN　距离是 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$，故②错误；

对于③，如图建立空间直角坐标系，则 $B_1(2,0,2), D_1(0,2,2), C(2,2,0), M(1,0,2)$，



设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{MC}, 0\le\lambda\le 1$，

$\therefore \overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{MC}=\lambda(1,2,-2)$，又 $C(2,2,0)$， $B_1(2,0,2),D_1(0,2,2)$，

$\therefore P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$， $\overrightarrow{PB_1}=(\lambda,2\lambda-2,2-2\lambda),\overrightarrow{PD_1}=(\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$，

假设存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1$=90°，

$\therefore \overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{PD_1}=\lambda(\lambda-2)+2\lambda(2\lambda-2)+(2-2\lambda)^2=0$，整理得 $9\lambda^2-14\lambda+4=0$，

$\therefore \lambda=\dfrac{7+\sqrt{13}}{9}>1$（舍去）或 $\lambda=\dfrac{7-\sqrt{13}}{9}$，

故存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1$=90°，故③正确；

对于④，由上知 $P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$，所以点 $P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$ 在 DD_1 的射影为 $(0,2,2\lambda)$，

$\therefore$点 $P(2-\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$ 到 DD_1 的距离为：

$$d=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-2\lambda)^2}=\sqrt{5\lambda^2-4\lambda+4}=\sqrt{5\left(\lambda-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}},$$

$\therefore$当 $\lambda=\dfrac{2}{5}$ 时，$d_{\min}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$故△PDD_1 面积的最小值是 $\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，故④错误.

故答案为：①③.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【答案】（1） $f(x)=\sin 2x$

（2）$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）可以选择条件①②或条件①③，先由周期计算 ω，再计算 φ 即可；

（2）先求出 $2x+\dfrac{\pi}{6}$ 整体的范围，再结合单调性求最大值即可.

【小问 1 详解】

选择条件①②：

由条件①及已知得 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，

所以 $\omega=2$．

由条件②得 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(0)=0$，即 $\sin\varphi=0$．

解得 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$．

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=0$，

所以 $f(x)=\sin 2x$.

经检验 $\varphi=0$ 符合题意.

选择条件①③：

由条件①及已知得 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$.

由条件③得 $2\times\dfrac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=0$.

所以 $f(x)=\sin 2x$.

【小问 2 详解】

由题意得 $g(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

化简得 $g(x)=\dfrac{3}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

因为 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{2\pi}{3}$，

所以当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$g(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

17【答案】（1）证明见解析

（2）存在；$\dfrac{DP}{DF}=\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】（1）证明出四边形 $DCEF$ 为平行四边形，进而证明出线面平行；（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量求解.

【小问 1 详解】

证明：由题意得 $EF\parallel CD$，$EF=CD$，

所以四边形 $DCEF$ 为平行四边形.

所以 $DF\parallel CE$.

因为 $DF\not\subset$ 平面 BCE，$CE\subset$ 平面 BCE，

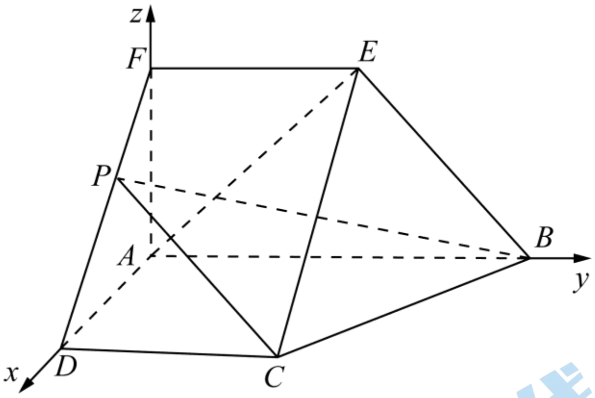
所以 $DF\parallel$ 平面 BCE.

【小问 2 详解】

线段 DF 上存在点 P，使得直线 AE 和平面 BCP 所成角的正弦值为 $\dfrac{5}{6}$，理由如下：

由题意得 AD，AB，AF 两两垂直.

如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



设 $AB=2$，则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，

$C(1,1,0)$，$D(1,0,0)$，$E(0,1,1)$，$F(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(1,-2,0)$，$\overrightarrow{DF}=(-1,0,1)$.

设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DF}\ (0\le\lambda\le1)$，则 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{BD}+\lambda\overrightarrow{DF}=(1-\lambda,-2,\lambda)$

设平面 BCP 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-y=0,\\ (1-\lambda)x-2y+\lambda z=0.\end{cases}$

令 $x=\lambda$，则 $y=\lambda$，$z=1+\lambda$.

于是 $\vec{n}=(\lambda,\lambda,1+\lambda)$

设直线 AE 和平面 BCP 所成角为 θ，

由题意得：$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AE}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\dfrac{|1+2\lambda|}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+(1+\lambda)^2}}=\dfrac{5}{6}$，

整理得：$3\lambda^2-22\lambda+7=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=7$.

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{DP}{DF}=\dfrac{1}{3}$.

所以线段 DF 上存在点 P，当 $\dfrac{DP}{DF}=\dfrac{1}{3}$ 时，直线 AE 和平面 BCP 所成角的正弦值为 $\dfrac{5}{6}$.

18【答案】（1）1400

（2）分布列见解析；期望为 $\dfrac{3}{5}$

（3）$a=42$

【解析】

【分析】(1)用样本中“单位就业”的频率乘以毕业生人数可得；

(2)先由样本数据得选择“继续学习深造”的频率，然后由二项分布可得；

(3)由方差的意义可得.

【小问 1 详解】

由题意得，该校 2021 届大学毕业生选择“单位就业”的人数为$2500\times\frac{560}{1000}=1400$.

【小问 2 详解】

由题意得，样本中1000名毕业生选择“继续学习深造”的频率为$\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$.

用频率估计概率，从该地区 2021 届大学毕业生中随机选取 1 名学生，估计该生选择“继续学习深造”的概率为$\frac{1}{5}$.

随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

所以$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(1-\frac{1}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$,

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$,

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{125}$,

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(1-\frac{1}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$E(x)=0\times\frac{64}{125}+1\times\frac{48}{125}+2\times\frac{12}{125}+3\times\frac{1}{125}=\frac{3}{5}$.

【小问 3 详解】

易知五种毕业去向的人数的平均数为 200，要使方差最小，则数据波动性越小，故当自主创业和慢就业人数相等时方差最小，所以$a=42$.

19.【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）$[0,\frac{8}{5}]$

【解析】

【分析】（1）直接由条件计算a,b即可；

（2）设出点 P 坐标，分别写出直线 PA，PB 的方程，表示出 M，N 坐标，由 $|MN|\leqslant 4$ 得到不等式，解不等式即可.

【小问 1 详解】

由题意得 $\begin{cases} 2a=4, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$

解得 $a^2=4$，$b^2=1$.

所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

设 $P(m,n)$（$-2<m<2$），

由已知得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，

所以直线 AP，BP 的方程分别为 $y=\dfrac{n}{m+2}(x+2)$，$y=\dfrac{n}{m-2}(x-2)$.

令 $x=4$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\dfrac{6n}{m+2}$，点 N 的纵坐标为 $y_N=\dfrac{2n}{m-2}$，

所以 $|MN|=\left|\dfrac{6n}{m+2}-\dfrac{2n}{m-2}\right|=\left|\dfrac{4n(m-4)}{m^2-4}\right|$.

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{m^2}{4}+n^2=1$，

所以 $m^2-4=-4n^2$，即 $|MN|=\left|\dfrac{m-4}{n}\right|$.

因为 $|MN|\leqslant 4$，所以 $\left|\dfrac{m-4}{n}\right|\leqslant 4$，即 $(m-4)^2\leqslant 16n^2$.

所以 $(m-4)^2\leqslant -4(m^2-4)$.

整理得 $5m^2-8m\leqslant 0$，解得 $0\leqslant m\leqslant \dfrac{8}{5}$.

所以点 P 横坐标 取值范围是 $[0,\dfrac{8}{5}]$.

20.【答案】（1）$y=x$

（2）$(3,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）直接求导，由 $f'(x)=1$ 求出切点，写出切线方程即可；

（2）求导后分类讨论确定函数 单调性，结合零点存在定理确定零点个数即可求出 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=x\sqrt{1-x}\,(x\leqslant 1)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $f'(x)=1$，解得 $x=0$.

因　$f(0)=0$，所以切点坐标为 $(0,0)$.

故切线方程为 $y=x$.

【小问 2 详解】

因为 $g(x)=x\sqrt{a-x}-\dfrac{2a}{3}\ (x\leqslant a)$，

所以 $g'(x)=\dfrac{2a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{2a}{3}$.

当 $a\leq 0$ 时，由 $x\leqslant a$，得 $2a-3x\geqslant -a\geqslant 0$，

所以 $g'(x)\geqslant 0$，则 $g(x)$ 在定义域 $(-\infty,a]$ 上是增函数.

故 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意，舍去.

当 $a>0$ 时，随 x 变化 $g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\dfrac{2a}{3}\right)$	$\dfrac{2a}{3}$	$\left(\dfrac{2a}{3},a\right)$	a
$g'(x)$	+	0	−	
$g(x)$	单调递增	$\dfrac{2\sqrt{3}a\sqrt{a}-6a}{9}$	单调递减	$-\dfrac{2a}{3}$

故 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{2a}{3})$ 上单调递增，在区间 $(\dfrac{2a}{3},a)$ 上单调递减，

当 $x=\dfrac{2a}{3}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $g(\dfrac{2a}{3})=\dfrac{2\sqrt{3}a\sqrt{a}-6a}{9}$.

若 $0<a\leq 3$ 时，$g(\dfrac{2a}{3})=\dfrac{2\sqrt{3}a(\sqrt{a}-\sqrt{3})}{9}\leqslant 0$，此时 $g(x)$ 至多有一个零点；

若 $a>3$ 时，$g(\dfrac{2a}{3})>0$，又 $g(0)=g(a)=-\dfrac{2a}{3}<0$，

由零点存在性定理可得 $g(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{2a}{3})$ 和区间 $(\dfrac{2a}{3},a)$ 上各有一个零点，

所以函数 $g(x)$ 恰有两个不同的零点，符合题意.

综上所述，a 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

21.【答案】（1）A_1 不是 S 的 3 元完美子集；A_2 是 S 的 3 元完美子集；理由见解析

（2）12　（3）证明见解析；等号成立的条件是 $a_1=\dfrac{n+1}{m+1}\in\mathrm{N}^*$ 且 $a_i=\dfrac{(n+1)i}{m+1}(2\leqslant i\leqslant m)$

【解析】

【分析】（1）根据m元完美子集的定义判断可得结论；

（2）不妨设$a_1<a_2<a_3$．由$a_1=1$，$a_1=2$，$a_1\geq 3$分别由定义可求得$a_1+a_2+a_3$的最小值；

（3）不妨设$a_1<a_2<\cdots<a_m$，有$a_i<a_i+a_1<a_i+a_2<\cdots<a_i+a_{m+1-i}\leqslant n$．$a_i+a_1,a_i+a_2,\cdots,a_i+a_{m+1-i}$是A中$m+1-i$个不同的元素，且均属于集合$\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_m\}$，此时该集合恰有$m-i$个不同的元素，显然矛盾．因此对任意$1\leq i\leq m$，都有$a_i+a_{m+1-i}\geqslant n+1$，由此可得证.

【小问1详解】

解：（1）①因为$1+2=3\leqslant 5$，又$3\notin A_1$，所以A_1不是S的3元完美子集.

②因为$2+2=4\leqslant 5$，且$4\in A_2$，而$5+5>4+5>4+4>2+5>2+4>5$，

所以A_2是S的3元完美子集.

【小问2详解】

解：不妨设$a_1<a_2<a_3$.

若$a_1=1$，则$a_1+a_1=2\in A$，$1+2=3\in A$，$1+3=4\in A$，与3元完美子集矛盾；

若$a_1=2$，则$a_1+a_1=4\in A$，$2+4=6\in A$，而$2+6>7$，符合题意，此时$a_1+a_2+a_3=12$.

若$a_1\geq 3$，则$a_1+a_1\geqslant 6$，于是$a_2\geq 4$，$a_3\geqslant 6$，所以$a_1+a_2+a_3\geqslant 13$.

综上，$a_1+a_2+a_3$的最小值是12.

【小问3详解】

证明：不妨设$a_1<a_2<\cdots<a_m$.

对任意$1\leq i\leq m$，都有$a_i+a_{m+1-i}\geqslant n+1$，

否则，存在某个$i(1\leqslant i\leqslant m)$，使得$a_i+a_{m+1-i}\leqslant n$.

由$a_1<a_2<\cdots<a_m$，得$a_i<a_i+a_1<a_i+a_2<\cdots<a_i+a_{m+1-i}\leqslant n$.

所以$a_i+a_1,a_i+a_2,\cdots,a_i+a_{m+1-i}$是A中$m+1-i$个不同的元素，且均属于集合$\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_m\}$，

该集合恰有$m-i$个不同的元素，显然矛盾.

所以对任意$1\leq i\leq m$，都有$a_i+a_{m+1-i}\geqslant n+1$.

于是$2(a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m)=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+(a_{m-1}+a_2)+(a_m+a_1)\geqslant m(n+1)$.

即$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant\dfrac{m(n+1)}{2}$.

等号成立的条件是$a_1=\dfrac{n+1}{m+1}\in\mathrm{N}^*$且$a_i=\dfrac{(n+1)i}{m+1}(2\leqslant i\leqslant m)$.

2022 北京高三各区一模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三一模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【高三一模】—【一模试题】，即可免费获取全部一模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多一模排名等信息，考后持续更新！