

北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期阶段练习

高二数学

2023.10

班级_____ 姓名_____ 学号_____

本试卷共 3 页, 共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案写在答题纸上, 在试卷上作答无效.

一、选择题: 本大题共 12 道小题, 每小题 4 分, 共 48 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目的要求. 把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 已知点 $A(2,1,0)$ 和点 $B(0,-3,4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB} =$

- A. $(-2,-4,4)$ B. $(2,4,-4)$ C. $(-2,-2,4)$ D. $(2,2,-4)$

2. 设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是两两不共线的向量, 且向量 $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, 则 $2\vec{a} - 3\vec{b} =$

- A. $11\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ B. $-11\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ C. $-11\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$ D. $11\vec{i} - 10\vec{j} - 11\vec{k}$

3. 点 $M(3,-2,1)$ 关于 yOz 平面对称的点的坐标是

- A. $(-3,2,1)$ B. $(-3,2,-1)$ C. $(3,2,-1)$ D. $(-3,-2,1)$

4. 已知 $\vec{a} = (-1,0,-1), \vec{b} = (1,1,2)$, 则向量 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影数量为

- A. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. -3

5. 与向量 $\overrightarrow{AB} = (1,-1,\sqrt{2})$ 共线的单位向量是

- A. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
 C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 和 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

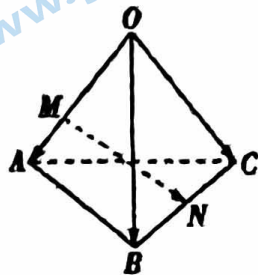
北京市第一六一中学 2023-2024 学年度第一学

6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$, 若 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$, 则

- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$

7. 如图, 空间四边形OABC中, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, 点M在OA上, 且 $OM = 2MA$, N为BC的中点, 则 \vec{MN} 可用向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示为

- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
 C. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

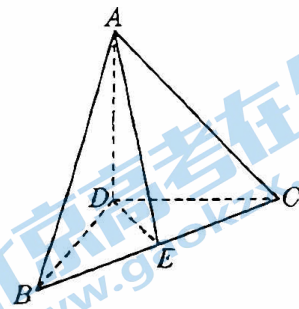


8. 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = l$. 下列结论中正确的是

- A. 若直线 $m \perp$ 平面 α , 则 $m \parallel \beta$ B. 若平面 $\gamma \perp$ 平面 α , 则 $\gamma \parallel \beta$
 C. 若直线 $m \perp$ 直线 l , 则 $m \perp \beta$ D. 若平面 $\gamma \perp$ 直线 l , 则 $\gamma \perp \beta$

9. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, DA, DB, DC 两两垂直, 且 $DB = DC = 2$, 点 E 为 BC 中点, 若直线 AE 与 CD 所成的角为 60° , 则三棱锥 $A-BCD$ 的体积等于

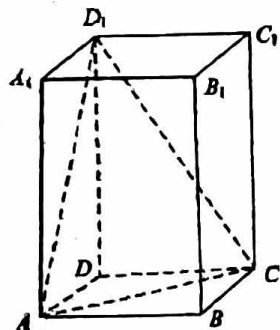
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 2



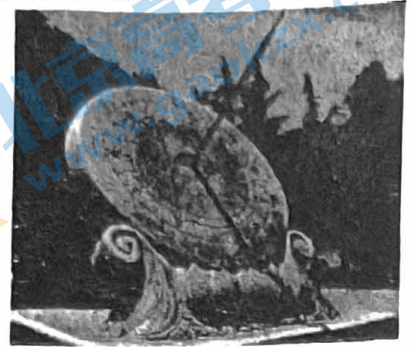
10. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$AA_1 = 2AB = 2BC = 2$, 点 B 到平面 ACD_1 的距离为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$



11. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球（球心记为 O ），地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40° ，则晷针与点 A 处的水平面所成角为（ ）



- A. 20° B. 40° C. 50° D. 90°

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形， P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是（ ）

- A. -1 B. $-\frac{4}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. -2

二、填空题：本大题共6小题，共30分. 把答案填在答题纸中相应的横线上.

13. 设 \vec{a} , \vec{b} 为单位向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

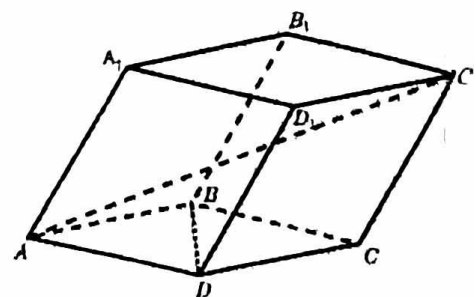
14. 若空间三点 $A(4,1,3), B(2,-5,1), C(m,4,4)$ 共线，则实数 $m =$ _____.

15. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = BC = 4$ ， $CC_1 = 2$ ，则平面 A_1BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角的余弦值为_____.

16. 如图，在棱长都为1的平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

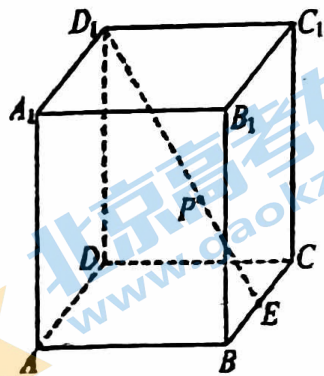
\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , $\overrightarrow{AA_1}$ 两两夹角均为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BD} =$ _____;

请选择该平行六面体的三个顶点，使得经过这三个顶点的平面与直线 AC_1 垂直. 这三个顶点可以是_____.



17. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1, BC=2, AA_1=3$,

E 为 BC 的中点, 点 P 在线段 D_1E 上. 点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为_____.



18. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$, 其中

$\lambda \in [0,1], \mu \in [0,1]$, 则下列说法中, 正确的有_____ (请填入所有正确说法的序号)

①当 $\lambda=1$ 时, $\triangle AB_1P$ 的周长为定值

②当 $\mu=1$ 时, 三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

③当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1P \perp BP$

④当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 72 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

19. (本小题满分 14 分)

已知向量 $\vec{a} = (m, 2\sqrt{3}, 6), \vec{b} = (1, 0, 2), \vec{c} = (1, \sqrt{3}, 2) (m \in \mathbb{R})$

(I) 求 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$ 的值;

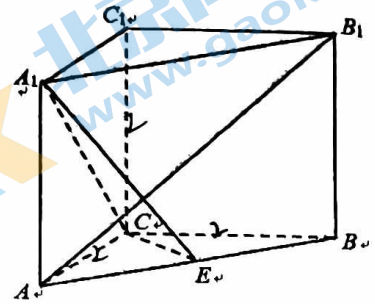
(II) 求 $\cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$;

(III) 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值.

20. (本小题满分 14 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=CB=CC_1=2$, E 是 AB 中点.

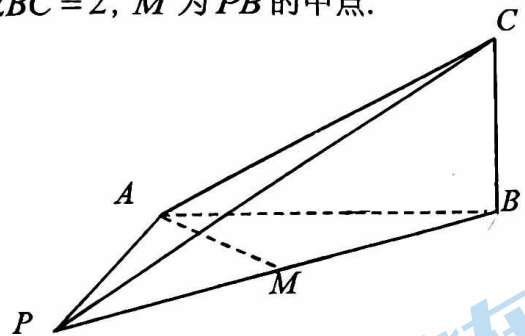
- (I) 求直线 A_1C 与直线 B_1E 所成角的余弦值;
 (II) 求直线 A_1C_1 与平面 A_1CE 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 15 分)

如图, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $AB=PA=2BC=2$, M 为 PB 的中点.

- (I) 求证: $AM \perp$ 平面 PBC ;
 (II) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



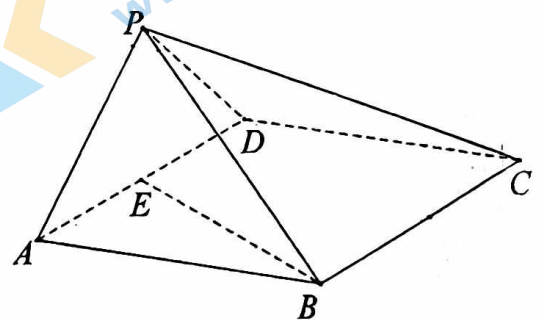
22. (本小题满分 15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$,

$PA=PD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, E 是线段 AD 的中点, 连结 BE .

- (I) 求证: $BE \perp PA$;
 (II) 在线段 PB 上是否存在点 F , 使得 $EF \parallel$ 平面 PCD ?

若存在, 求出 $\frac{PF}{PB}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



23. (本小题满分 14 分)

已知集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$ 是集合 $S = \{2007, 2008, 2009, \dots, 2022, 2023\}$ 的一个含有 8 个元素的子集.

(I) 当 $X = \{2007, 2008, 2011, 2013, 2017, 2019, 2022, 2023\}$ 时,

设 $x_i, x_j \in X (1 \leq i, j \leq 8)$,

(i) 写出方程 $x_i - x_j = 2$ 的解 (x_i, x_j) ;

(ii) 若方程 $x_i - x_j = k (k > 0)$ 至少有三组不同的解, 写出 k 的所有可能取值;

(II) 证明: 对任意一个 X , 存在正整数 k , 使得方程 $x_i - x_j = k (1 \leq i, j \leq 8)$ 至少有三组不同的解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

