2021 北京昌平高三二模

数　　学

2021.5

本试卷共 6 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将答题卡交回.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,x^2\geqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

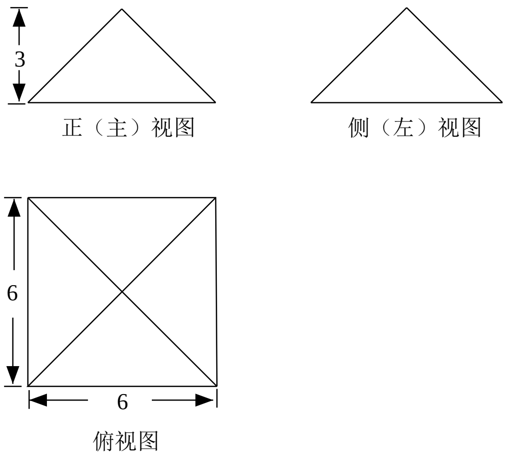
（A）$\{-1,0,1\}$　　（B）$\{-2,-1,1,2\}$

（C）$\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$　　（D）$\{x\,|\,x\leqslant -1$或$x\geqslant 1\}$

（2）已知复数 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

（3）某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的体积是



（A）24　　（B）36　　（C）54　　（D）108

（4）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则其渐近线方程为

（A）$y=\pm x$　　（B）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（C）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（D）$y=\pm 2x$

（5）下列函数中，最小正周期为 π 的奇函数是

（A）$y=\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$　　（B）$y=\sin|x|$

（C）$y=\cos^2x-\sin^2x$　　（D）$y=\sin x\cos x$

（6）过原点且倾斜角为 $45°$ 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为

（A） $2\sqrt{2}$　　（B） 3　　（C） $4\sqrt{2}$　　（D） 8

（7）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）中国历法推测遵循以测为辅，以算为主的原则. 例如《周髀算经》里对二十四节气的晷影长的记录中，冬至和夏至的晷影长是实测得到的，其它节气的晷影长则是按照等差数列的规律计算得出的.

二十四节气中，从冬至到夏至的十三个节气依次为：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种、夏至. 已知《周髀算经》中记录某年的冬至的晷影长为 13 尺，夏至的晷影长是 1.48 尺，按照上述规律，那么《周髀算经》中所记录的**立夏**的晷影长应为

（A） 3.4 尺　　（B） 4.36 尺　　（C） 5.32 尺　　（D） 21.64 尺

（9）将函数 $f(x)=\sin\omega x$（$\omega>0$）的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象经过点 $(\dfrac{2\pi}{3},0)$，则 ω 的最小值是

（A） $\dfrac{5}{4}$　　（B） 2　　（C） $\dfrac{12}{5}$　　（D） $\dfrac{13}{4}$

（10）已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M 是 BB_1 的中点，动点 P 在正方体内部或表面上，且 $MP//$ 平面 ABD_1，则动点 P 的轨迹所形成区域的面积是

（A） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B） $\sqrt{2}$　　（C） 1　　（D） 2

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

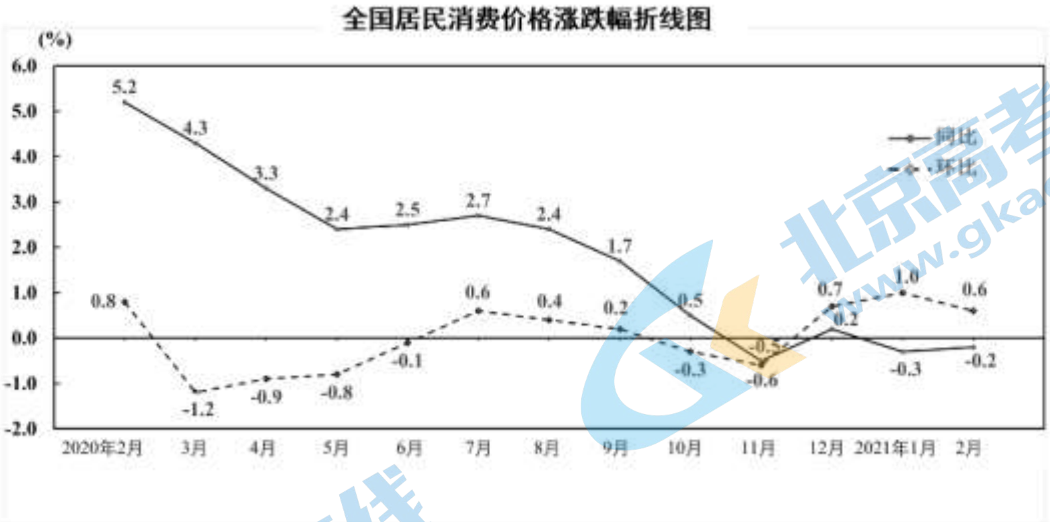
（11）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$ ________.

（12）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为 ________.（用数字作答）

（13）在△ABC 中，$a=2\sqrt{7}, b=2$，$\angle A=60°$，则 $c=$ ________；$\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$ ________.

（14）已知抛物线 C: $y^2=4x$ 与椭圆 D: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 有一个公共焦点 F，则点 F 的坐标是________；若抛物线的准线与椭圆交于 A,B 两点，O 是坐标原点，且 ΔAOB 是直角三角形，则椭圆 D 的离心率 $e=$ ________.

（15）下图是国家统计局发布的 2020 年 2 月至 2021 年 2 月全国居民消费价格涨跌幅折线图.



说明：1.在统计学中，同比是指本期统计数据与上一年同期统计数据相比较，例如2021**年 2 月与 2020 年 2 月相比较；环比是指本期统计数据与上期统计数据相比较，例如 2020 年 4 月与**2020**年 3 月相比较.2.**

$$同比增长率=\frac{本期数-同期数}{同期数}\times100\%，环比增长率=\frac{本期数-上期数}{上期数}\times100\%.$$

给出下列三个结论：

①2020 年 11 月居民消费价格低于 2019 年同期；

②2020 年 3 月至 7 月居民的消费价格持续增长；

③2020 年 7 月的消费价格低于 2020 年 3 月的消费价格.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n, $n\in\mathbf{N}^*$, 从条件①、条件②和条件③中选择两个作为已知，并完成解答：

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设等比数列$\{b_n\}$满足$b_2=a_4$， $b_3=a_7$， 求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和T_n.

条件①： $a_1=-3$；

条件②： $a_{n+1}-a_n=2$；

条件③： $S_2=-4$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 13 分）

某大学为了解学生对 A，B 两本数学图书的喜好程度，从这两本数学图书都阅读过的学生中随机抽取了 50 人，分别对这两本图书进行评分反馈，满分为 100 分，得到的相应数据整理如下表.

分数	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
A 图书频数	2	2	8	20	18
B 图书频数	2	10	10	12	16

规定：学生对图书的“评价指数”如下表.

分数	$[50,70)$	$[70,90)$	$[90,100]$
评价指数	1	2	3

（I）从 A，B 两本图书都阅读过的学生中任选 1 人，试估计其对 A 图书“评价指数”为 2 的概率；

（II）从对 B 图书“评价指数”为 1 的学生中任选 3 人进一步访谈，设 X 为 3 人中评分在 $[50,60)$ 内的人数，求随机变量 X 的分布列及数学期望；

（III）试估计学生更喜好 A, B 哪一本图书，并简述理由.

18. (本小题 14 分)

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$AD\perp DB$，

$AA_1=AD=\frac{1}{2}AB=1$.

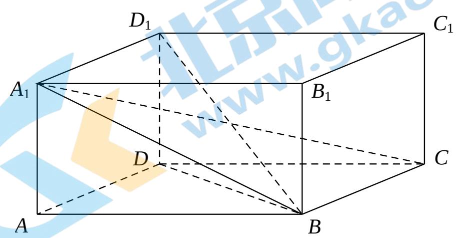
（I）求证：$AD\perp BD_1$；

（II）求二面角 A_1-BC-A 的大小；

（III）在线段 BD_1 上是否存在点 M，

使得 $DM\perp$ 平面A_1BC？若存在，

求 $\frac{D_1M}{D_1B}$ 的值；若不存在，说明理由.



19. (本小题 15 分)

已知椭圆 C： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 过点 $P(0,1)$,且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（I）求椭圆 C 的标准方程；

（II）设直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B，当 $|PA|=|PB|$ 时，求实数 k 的取值范围.

20．(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2+1$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(II) 若 $f(x)\geqslant 2$ 对于任意的 $x\in[0,1]$ 都成立，求实数 a 的取值范围.

21．（本小题 15 分）

对于有限数列 $\{a_n\}$， $n\leqslant N$， $N\geqslant 3$， $N\in\mathbf{N}^*$，定义：对于任意的 $k\leqslant N$， $k\in\mathbf{N}^*$，有

（1） $S^*(k)=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_k|$；

（2）对于 $c\in\mathbf{R}$，记 $L(k)=|a_1-c|+|a_2-c|+|a_3-c|+\cdots+|a_k-c|$.

对于 $k\in\mathbf{N}^*$，若存在非零常数 c，使得 $L(k)=S^*(k)$，则称常数 c 为数列 $\{a_n\}$ 的 k 阶 ω 系数.

（I）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-2)^n$，计算 $S^*(4)$，并判断 2 是否为数列的 4 阶 ω 系数；

（II）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-39$，且数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数为 3，求 m 的值；

（III）设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，满足 -1， 2 均为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数，且 $S^*(m)=507$，求 m 的最大值.

2021 北京昌平高三二模数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分 .

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	B	C	B	A	D	A	C	B	B	A

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）$\sqrt{10}$　　（12）-80　　（13）6；$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

（14）$(1,0)$；$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　（15）①③

注：第（13）和（14）题第一空 3 分,第二空 2 分. 第（15）题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题 13 分）

解：(不能选择①③作为已知条件)

选择①②作为已知条件..................2 分

因为 $a_1=-3$， $a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=-3$ 为首项，公差 $d=2$ 的等差数列.

所以 $a_n=2n-5$ ....6 分

选择②③作为已知条件..................2 分

因为 $a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，公差为 $d=2$ 的等差数列.

因为 $S_2=-4$，

所以 $a_1+a_2=-4$.

所以 $2a_1+d=-4$.

所以 $a_1=-3$.

所以 $a_n=2n-5$ ....6 分

（II）设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $b_2=a_4=3$，$b_3=a_7=9$，$q=\frac{b_3}{b_2}=3$，

所以 $b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{3}{3}=1$.

所以等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

所以 $a_n+b_n=(2n-5)+3^{n-1}$.

所以 $T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=[-3+(-1)+\cdots+(2n-5)]+(1+3+\cdots+3^{n-1})$

$=\frac{n\times[-3+(2n-5)]}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}$

$=n^2-4n+\frac{1}{2}(3^n-1)$ ....13 分

（17）（本小题 13 分）

解：（I）由评分频数分布表可知，对 A 图书评分的学生中，"评价指数为 2"的学生所占的频率为 $\frac{8+20}{50}=\frac{14}{25}$，

所以从 A，B 两本图书都阅读过的学生中任选 1 人，估计其对 A 图书"评价指数"为 2 的概率为

$\frac{14}{25}$ ....4 分

（II）由题意，所以 X 的所有可能值为 $0,1,2$.

$P(X=0)=\frac{C_2^0C_{10}^3}{C_{12}^3}=\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_{10}^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{6}{11}+1\times\frac{9}{22}+2\times\frac{1}{22}=\frac{1}{2}$. .... 10 分

（III）设学生对 A 图书的“评价指数”为ξ，对 B 图书的“评价指数”为η． 由题意，从阅读过两本图书的学生中任取一位，估计ξ的分布列分别为

ξ	1	2	3
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{9}{25}$

所以$E(\xi)=1\times\frac{2}{25}+2\times\frac{14}{25}+3\times\frac{9}{25}=\frac{57}{25}$．

估计η的分布列分别为

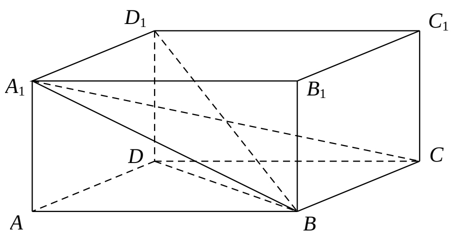
η	1	2	3
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{8}{25}$

所以$E(\eta)=1\times\frac{6}{25}+2\times\frac{11}{25}+3\times\frac{8}{25}=\frac{52}{25}$．

因为$E(\xi)>E(\eta)$，所以学生更喜好图书 A.　　　……………… 13 分

（18）（本小题 14 分）

解：（I）证明：在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，



$DD_1\perp$底面$ABCD$，

因为$AD\subset$底面$ABCD$，

所以$DD_1\perp AD$. …………2 分

因为$AD\perp BD$，　$BD\cap DD_1=D$，

所以$AD\perp$平面BDD_1．

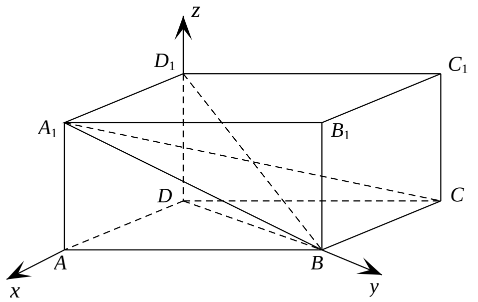
因为$BD_1\subset$平面BDD_1，

所以$AD\perp BD_1$．　　　　　　……………… 4 分

（II）因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，且$AD\perp DB$，所以DA, DB, DD_1两两垂直.

如图建立空间直角坐标系$D-xyz$，则$D(0,0,0)$，　$A(1,0,0)$，

$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$A_1\left(1,0,1\right)$，$D_1\left(0,0,1\right)$.



设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(x,y,z\right)$.

$\overrightarrow{CB}=\left(1,0,0\right)$，$\overrightarrow{CA_1}=\left(2,-\sqrt{3},1\right)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CA_1}\cdot\boldsymbol{m}=0.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=0,\\ 2x-\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $z=\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{m}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$.

因为 $DD_1\perp$ 平面$ABCD$，

所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(0,0,1\right)$.

所以 $\cos\left\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由题可知二面角 A_1-BC-A 为锐角，

所以二面角 A_1-BC-A 的大小为 $30°$.　　　　……………… 10 分

(III) 设 $\overrightarrow{D_1M}=\lambda\overrightarrow{D_1B},\lambda\in\left[0,1\right]$.

因为 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1M}=\overrightarrow{DD_1}+\lambda\overrightarrow{D_1B}=(0,0,1)+\lambda(0,\sqrt{3},-1)=(0,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$，

由（II）知平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$，

因为 $DM\perp$ 平面A_1BC，可得 $\overrightarrow{DM}\,//\,\boldsymbol{m}$.

所以 $\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{1}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{3}}$. 解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}\in[0,1]$.

所以，在线段 BD_1 上存在点 M 使得 $DM\perp$ 平面A_1BC，$\dfrac{D_1M}{D_1B}$ 的值是 $\dfrac{1}{4}$.

……………… 14 分

19. (本小题 15 分)

解：（I）依题意得 $b^2=1$.

由 $\begin{cases} c^2=a^2-b^2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 解得 $a^2=4$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　　　　……..……… 5 分

（II）解法 1：（1）当 $k=0$ 时，显然成立.

（2）当 $k\neq 0$ 时，

① $m=0$ 时，显然不成立.

② 当 $m\neq 0$，即 $mk\neq 0$ 时，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$

得 $(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$.

因为直线 l 与椭圆 C 的有两个交点，

所以 $\Delta=64m^2k^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$.

即 $4k^2+1-m^2>0$.（*）.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+1}$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{-8k^2m}{4k^2+1}+2m=\dfrac{2m}{4k^2+1}$.

所以线段 AB 的中点 $M\left(\dfrac{-4mk}{4k^2+1},\dfrac{m}{4k^2+1}\right)$.

直线 MP 的斜率 $k_{MP}=\dfrac{\dfrac{m}{4k^2+1}-1}{\dfrac{-4mk}{4k^2+1}}=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}$,

由 $|PA|=|PB|$，得 $MP\perp AB$.

所以 $k_{MP}\cdot k=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}\cdot k=-1$

解得 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$.

将 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$ 代入到（*）中，得 $4k^2+1-\dfrac{(4k^2+1)^2}{9}>0$，

即 $\dfrac{(4k^2+1)(8-4k^2)}{9}>0$，

所以 $8-4k^2>0$.

解得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，且 $k\neq 0$.

综上所述，实数 k 的取值范围是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　　………………15 分

解法 2：由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$.

因为直线 l 与椭圆 C 的有两个交点，

所以 $\Delta=64m^2k^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$

即 $4k^2+1-m^2>0$（1）.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 则 $x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+1}$.

由 $|PA|=|PB|$ 得，$x_1^2+(y_1-1)^2=x_2^2+(y_2-1)^2$.

即 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2-2)=0$.

即 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+k(x_1-x_2)[k(x_1+x_2)+(2m-2)]=0$.

从而 $(x_1-x_2)[(k^2+1)(x_1+x_2)+2k(m-1)]=0$.

由 $x_1\neq x_2$ 得 $(k^2+1)(x_1+x_2)+2k(m-1)=0$.

所以 $\dfrac{-8mk(k^2+1)}{4k^2+1}+2k(m-1)=0$.

即 $k(3m+4k^2+1)=0$.

解得 $k=0$ 或 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$.

将 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$ 代入到（1）中，得 $4k^2+1-\dfrac{(4k^2+1)^2}{9}>0$，

即 $\dfrac{(4k^2+1)(8-4k^2)}{9}>0$，

所以 $8-4k^2>0$.

解得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$.

所以实数 k 的取值范围是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　　　　………………15 分

20. (本小题 15 分)

解：（I） $f'(x)=e^x-2ax$，

所以切线的斜率 $k=f'(0)=1$.

因为 $f(0)=e^0+1=2$，

所以切线的方程 $y=x+2$.　　　　………………5 分

（II）解法 1：由已知，对于任意的 $x\in[0,1]$， $e^x-ax^2+1\geqslant 2$ 都成立，

即对于任意的 $x\in[0,1]$， $ax^2\leqslant e^x-1$ 都成立.

当 $x=0$ 时， $ax^2\leqslant e^x-1$ 显然成立.

当 $x\neq 0$ 时，对于任意的 $x\in(0,1]$， $a\leqslant\dfrac{e^x-1}{x^2}$ 都成立.

设 $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2}$， 则 $a\leqslant g(x)_{\min}$.

而 $g'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-2x(e^x-1)}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x+2}{x^3}$.

设 $h(x)=(x-2)e^x+2$， 则 $h'(x)=(x-1)e^x$.

由 $x\in(0,1]$， 得 $h'(x)\leqslant 0$ 在区间 $(0,1]$ 上恒成立，

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数，且 $h(0)=0$.

所以 $h(x)<0$ 在区间 $(0,1]$ 上恒成立.

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数.

所以当 $x=1$ 时， $g(x)_{\min}=g(1)=e-1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,e-1]$.　　　　………………15 分

解法 2：

设 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$， 则 $g'(x)=e^x-2a$.

（1）当$a\leqslant 0$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$在区间$[0,1]$上是增函数.

当$x=0$时，$g(x)_{\min}=1>0$，

所以$g(x)\geqslant 0$在区间$[0,1]$上恒成立.

所以函数$f(x)$在区间$[0,1]$上是增函数.

所以$f(x)_{\min}=f(0)=2$.

即$f(x)\geqslant 2$对于任意的$x\in[0,1]$都成立.

（2）当$a>0$时，令$g'(x)=0$，即$e^x=2a$，解得$x=\ln 2a$.

①当$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$\ln 2a\leqslant 0$，则$g'(x)\geqslant 0$.

从而函数$g(x)$在区间$[0,1]$上是增函数.

当$x=0$时，$g(x)_{\min}=1>0$，

所以$g(x)\geqslant 0$在区间$[0,1]$上恒成立.

所以函数$f(x)$在区间$[0,1]$上是增函数.

所以$f(x)_{\min}=f(0)=2$.

即$f(x)\geqslant 2$对于任意的$x\in[0,1]$都成立.

②当$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$时，$0<\ln 2a<1$.

当x变化时，$g'(x),g(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,1)$
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以当$x=\ln 2a$时，$g(x)_{\min}=e^{\ln 2a}-2a\ln 2a=2a(1-\ln 2a)\geqslant 0$.

所以$g(x)\geqslant 0$在区间$[0,1]$上恒成立.

所以函数$f(x)$在区间$[0,1]$上是增函数.

所以$f(x)_{\min}=f(0)=2$.

即$f(x)\geqslant 2$对于任意的$x\in[0,1]$都成立.

③当$a\geqslant\frac{e}{2}$时，$\ln 2a\geqslant 1$.

所以 $g'(x)<0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立.

所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是减函数.

因为 $g(0)=1>0, g(1)=\mathrm{e}-2a<0$，

所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $g(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$.

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	0	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	极大值	↘	$\mathrm{e}-a+1$

当 $f(1)=\mathrm{e}-a+1\geqslant 2$，即 $a\leqslant \mathrm{e}-1$ 时，$f(x)\geqslant 2$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立.

所以 $\frac{\mathrm{e}}{2}\leqslant a\leqslant \mathrm{e}-1$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\mathrm{e}-1]$.　　………………15 分

21. (本小题 15 分)

解：（I）因数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=(-2)^n$，所以数列 $\{|a_n|\}$ 为等比数列，且 $|a_n|=2^n$.

得 $S^*(4)=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=30$.

数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=(-2)^n$，所以当 $c=2$ 时，

$L(4)=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+|a_4-2|$

$=-(a_1-2)+(a_2-2)-(a_3-2)+(a_4-2)$

$=|a_1|+2+|a_2|-2+|a_3|+2+|a_4|-2$

$=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=S^*(4)$.

所以 2 是数列 $\{a_n\}$ 的 4 阶 ω 系数.　　………………4 分

（II）因为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数为 3，所以当 $c=3$ 时，存在 m，使 $L(m)=S^*(m)$ 成立.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=-39n+\frac{3n(n+1)}{2}$.

令 $a_n\geqslant 0$，则 $n\geqslant 13$.

所以，$S^*(n)=\begin{cases}39n-\dfrac{3n(n+1)}{2}, n\leqslant 13,\\ -39n+\dfrac{3n(n+1)}{2}+468, n\geqslant 14.\end{cases}$

设等差数列$\{a_n-3\}$的前n项和为T_n，$a_n-3=3n-42$，

则$T_n=-42n+\dfrac{3n(n+1)}{2}$.

令$a_n-3\geqslant 0$，则$n\geqslant 14$.

所以，$L(n)=\begin{cases}42n-\dfrac{3n(n+1)}{2}, n\leqslant 13,\\ -42n+\dfrac{3n(n+1)}{2}+546, n\geqslant 14.\end{cases}$

当$m\leqslant 13$时，$L(m)\neq S^*(m)$，

当$m\geqslant 14$时，$L(m)=S^*(m)$，

则$-39m+\dfrac{3m(m+1)}{2}+468=-42m+\dfrac{3m(m+1)}{2}+546$，解得$m=26$………………11 分

（III）设数列$\{a_n\}$为等差数列，满足-1，2均为数列$\{a_n\}$的m阶ω系数，$S^*(m)=507$，

则存在$k\in\mathbf{N}^*$，使$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_m|$

$=|a_1+1|+|a_2+1|+|a_3+1|+\cdots+|a_m+1|$

$=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+\cdots+|a_m-2|=507$成立.

设数列$\{a_n\}$的公差为d，构造函数

$f(x)=|x-d|+|x-2d|+|x-3d|+\cdots+|x-md|-507$.

由已知得$f(a_m+d)=|a_m|+|a_m-d|+|a_m-2d|+\cdots+|a_m-(m-1)d|-507$

$=|a_m|+|a_{m-1}|+|a_{m-2}|+\cdots+|a_1|-507=0$.

所以，函数$f(x)$至少有三个零点a_m+d，a_m+d+1，a_m+d-2.

由函数$f(x)$的图象与性质，可知m为偶数，且满足

$\begin{cases}\dfrac{m}{2}d\leqslant a_m+d-2<a_m+d<a_m+d+1\leqslant(\dfrac{m}{2}+1)d,\\ f(\dfrac{(m+1)d}{2})=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}d\geqslant 3,\\ \dfrac{m^2d}{4}=507.\end{cases}$

所以$3m^2\leqslant 4\times 507$，解得$m\leqslant 26$.

构造等差数列$\{a_n\}$为：$-37,-34,-33,\cdots,38$.

可知当$m=26$时命题成立，即m的最大值为26 ....15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。