

北京十一学校 2020 届高三数学 12 月月考试题 (2019. 12. 5)

总分: 150 分 时间: 120 分钟 命题人: 杨文学

一. 选择题: 本题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分:

- 复数 $(1+i)^2 + \frac{2}{1+i}$ 的共轭复数是 ()
 A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
- 若集合 $M = \{x \mid |x| \leq 1\}$, $N = \{y \mid y = x^2, |x| \leq 1\}$, 则 ()
 A. $M = N$ B. $M \subseteq N$ C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \emptyset$
- 若 $a > b$, 则 ()
 A. $\ln(a-b) > 0$ B. $3^a < 3^b$ C. $a^3 - b^3 > 0$ D. $|a| > |b|$
- 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是 ()
 A. α 内有无数条直线与 β 平行
 B. α 内有两条相交直线与 β 平行
 C. α, β 平行于同一条直线
 D. α, β 垂直于同一个平面
- 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 d 不为零, 前 n 项和是 S_n . 若 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 则 ()
 A. $a_1 d \leq 0, dS_4 \leq 0$
 B. $a_1 d < 0, dS_4 < 0$
- 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 是奇函数, 直线 $y = \sqrt{2}$ 与函数 $f(x)$ 的图象的两个相邻交点的横坐标之差的绝对值为 $\frac{\pi}{2}$, 则 ()
 A. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减 B. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$ 上单调递减
 C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增 D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$ 上单调递增
- 已知点 D, E 分别是边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 的中点, F 是 DE 的中点, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()
 A. $-\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$, 有下述四个结论: ① $f(x)$ 是偶函数

② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点

④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是 ()

A. ①②④

B. ②④

C. ①④

D. ①③

二. 填空题: 本题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分;

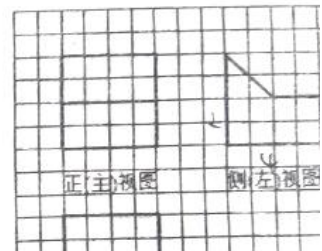
9. 已知 $|a|=1, |b|=\sqrt{2}$, 且 $a \perp (a-b)$, 则向量 a 与向量 b 的夹角是 _____.

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3, S_5 = -10$, 则 $a_5 =$ _____.

S_n 的最小值为 _____.

11. 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示.

如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为 _____.



12. 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数), 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____;

若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则 a 的取值范围是 _____.

三. 解答题: 本题共 6 个小题, 共 80 分;

15. (本小题满分 13 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2b-c}{a} = \frac{\cos C}{\cos A}$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 求函数 $y = \sqrt{3} \sin B + \sin(C - \frac{\pi}{6})$ 的值域.

16. (本小题满分 13 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l_1: y = 2x - 4, l_2: y = x - 1$,

设圆 C 的半径为 1, 圆心在 l_1 上.

(I) 若圆心 C 也在直线 l_2 上, ① 求圆 C 的方程;

② 过点 $A(2,0)$ 作圆 C 的切线, 求切线的方程;

(II) 若圆在直线 l_2 截得的弦长为 $\sqrt{2}$, 求圆 C 的方程.

17. (本题满分 13 分) 已知函数 $y=f(x)$, 若存在 x_0 , 使得 $f(x_0)=x_0$, 则称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的一个不动点, 设二次函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-2$.

(I) 当 $a=2, b=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的不动点;

(II) 若对于任意实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两个不同的不动点, 求实数 a 的取值范围;

(III) 在 (II) 的条件下, 若函数 $y=f(x)$ 的图象上 A, B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点, 且

直线 $y=kx+\frac{1}{a^2+1}$ 是线段 AB 的垂直平分线, 求实数 b 的取值范围.

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = x - 1 + \frac{a}{e^x}$ ($a \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数).

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求 a 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(III) 当 $a = 1$ 的值时, 若直线 $l: y = kx - 1$ 与曲线 $y = f(x)$ 没有公共点, 求 k 的最大值.

19. (本小题满分 14 分) 已知椭圆的焦点在 x 轴上, 一个顶点为 $(0, 1)$, 离心率为 $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 过椭圆的右焦点 F 的与坐标轴不垂直的直线 l 交椭圆于 A, B 两点.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设点 C 是点 A 关于 x 轴的对称点, 在 x 轴上是否存在一个定点 N , 使得 C, B, N 三点共线? 若存在, 求出定点的坐标; 若不存在, 说明理由;

(III) 设 $M(m, 0)$ 是线段 OF (O 为坐标原点) 上的一个动点, 且 $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \perp \overrightarrow{AB}$, 求 m 的取值范围.

20. (本小题满分 13 分) 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ a_n + 3, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}$

(1) 若 $a_1 = 1$, 请写出所有可能的 a_1 的取值;

(2) 求证: $\{a_n\}$ 中一定有一项的值为 1 或 3;

(3) 若正整数 m 满足当 $a_1 = m$ 时, $\{a_n\}$ 中存在一项值为 1, 则称 m 为“归一数”, 是否存在正整数 m , 使得 m 与 $m+1$ 都不是“归一数”? 若存在, 请求出 m 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 20 万+。

北京高考在线_2020 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980