# 南京大学 2019 新生数学基础摸底测试题及解答

> **题1** 求 $x \in [1,2)$，使得对任意的自然数 $n \in \mathbb{N}$，满足 $\lfloor 2^n x \rfloor$ 被4除后余1或者2.

其实这个对 $n = 1,2,3,4$ 观察一下就行了，转化为一个数列问题，取极限后结果应该算得是 $\frac{4}{3}$.
这里蕴含了**闭区间套定理(但这里不是闭区间)**的思想.

解: $n = 1:$ 当 $x \in [1,2)$ 时 $\lfloor 2x \rfloor \in \{2,3\}$，这里仅2满足题意，因此必有 $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$.

$n = 2:$ 当 $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$ 时 $\lfloor 4x \rfloor \in \{4,5\}$，仅5满足题意，因此必有 $x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

这样下去，记每一步得到的区间是 $[a_n, b_n), a_0 = 1, b_0 = 2$. 【用数学归纳法可以说明清楚，但是我太菜了，不会】则我们有：

$$a_{2n+1} = a_{2n}, b_{2n} = b_{2n-1},$$

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-1} + b_{2n-1}}{2}, b_{2n+1} = \frac{a_{2n} + b_{2n}}{2}.$$

用高中数学知识可以求得 $b_{2n} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \times 4^{-n}$. 于是 $a_{2n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times 4^{-n}$. **【这部分给高中生留作习题】**

因此 $a_{2n} \le \frac{4}{3} < b_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$. 取极限可知，满足题意的x仅有 $\frac{4}{3}$.

> **题2** 已知函数 $f(x) = x^n - ax - 1 (a \in \mathbb{R})$
> 【这里我觉得应该是 $a > 0$? 否则第(1)问就做不了】
> (1)证明：方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个正实数根 $\beta$，且 $\beta > 1$.
> (2)证明：方程 $f(x) = 0$ 的任意复数根 $\alpha$ 满足对(1)中 $\beta$ 有 $|\alpha| \le \beta$.

T2. (1)求个导. 易证 □.

(2) 由题意知 ~~[illegible]~~ $\beta^n - a\beta = 1$，因当 $x \ge \beta$ 时，$x^n - ax$ 单增

~~[illegible]~~ 用反证法，假设 $\exists |\alpha| > \beta$ 使等式成立. 则有

$\alpha^n - a\alpha \ge |\alpha|^n - a|\alpha| > \beta^n - a\beta = 1$ . 矛盾. □

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \frac{1}{\beta^n} & \frac{a}{\beta^{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda)\triangleq|\lambda I-A|=\lambda^n-\frac{a}{\beta^{n-1}}\lambda-\frac{1}{\beta^n}=\frac{1}{\beta^n}\left[(\beta\lambda)^n-a(\beta\lambda)-1\right]$$

（注 $f(1)=0$ 即 $\frac{a}{\beta^{n-1}}+\frac{1}{\beta^n}=1$ ）

$\rho(A)\leq\|A\|_\infty=1$

$\Rightarrow$ $f(\lambda)$ 的根最大模为1

$\Rightarrow$ $x^n-ax-1$ 的根最大模为 $\beta$



> **题3** 求整系数多项式 $P(x)$ 使得 $P(1+\sqrt[3]{3})=1+\sqrt[3]{3}, P(1+\sqrt{3})=7+\sqrt{3}$, 若不存在, 请说明理由.

**解:** 存在. 用待定系数法, 设 $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 代入题目给的两个条件, 并比较 $\sqrt{3},\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{9}$ 与常数项系数可得一个五元一次方程组:

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 28 & 10 & 4 & 1 & 1 \\ 16 & 6 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

用Gauss消去法【我这里选择了跑程序, 不想算了】可解得 $a_4=1, a_3=-3, a_2=3, a_1=-3, a_0=0$. 经检验可知符合题目条件. 因此 $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x$.

> **题4** 任意抛物线将平面分为三个区域, 即内部(焦点所在区域)、外部和抛物线. 试问: 有限条抛物线(共面)的内部是否能覆盖整个平面?

考虑任意一条直线和抛物线的相交情况，当且仅当直线垂直于抛物线准线时只有一个交点（相切视为两个重合的交点），而有限条抛物线要覆盖这条直线，

必须有两条符合这个条件，否则有限多个线段绝不可能覆盖一条直线。而过原点的这样的直线有无限条，它们对应的抛物线准线的斜率各不相同，因此不可能被有限多个抛物线覆盖。

第四题应该还可以这样:一个抛物的内部可以被角度足够小的一个角覆盖，例如可以找两个切线，然后让切点足够远。那么有限个抛物线盖住的可以被有限个足够小的角度覆盖，然而只要总和小于 360 度，自然就不能盖住整个平面。

> **题5** 证明: $\{(x,y)|x^2-2y^2=0,x,y\in\mathbb{C}\}=\{(0,0)\}$. 其中 $x,y$ 的实部与虚部均为有理数.

得到 x - 根号 2 y = 0 或 x + 根号 2 y = 0，比较实部虚部，发现只有 y = 0 才满足，因而 x 也为

9

> **题6** 甲、乙两人进行一数学游戏: 给定一正整数 $n(n\geq 2)$, 第一回合: 甲得到数 $n$，说出 $n$ 的任意真因子 $m$ 后得到新数 $n'=n-m$, 乙得到数 $n'$, 说出 $n'$ 的任意真因子 $m'$ 后得到新数 $n''$, 以此类推, 直到某个人说出某真因子后得到新数为1, 该人获胜. 若给定正整数 $2019$, 由甲先开始说数, 试问: 甲、乙谁有必胜的策略, 并简要陈述该策略.

**解:** 先给出一些观察:

(1)1的上一个数必定是2, 2的上一个数必定是3或4, 但是3的上一个数是4. 如果让自己拿到4, 说出因子1从而让对手得到3, 对手只能说因子1从而让自己得到2, 就赢了.

(2)【**奇数 $\Rightarrow$ 偶数**】如果一个人拿奇数, 因为奇数的真因子都是奇数, 从而得到的新数一定是偶数.

(3)【**偶数 $\Rightarrow$ 奇数**】如果一个人拿偶数, 如果说出真因子1, 必定得到奇数. 事实上, 记偶数为 $2^n p_1 \cdots p_k$, 这里 $p_i$ 都是奇素数(可以相同), 任取一个奇因子都能得到奇数.

(4)【**偶数 $\Rightarrow$ 偶数**】如果一个人拿偶数 $N(>2)$ , 2是 $N$ 的真因子, 则得到的新数可以为 $N-2.$

(5)根据(2)(3)(4), 一个人可以一直拿偶数, 并让对手拿到奇数.

策略: 甲说出任意一个2019的真因子以后, 乙都能得到偶数, 乙说出这个偶数的任意奇因子以后, 甲得到奇数(当然乙为了减少运算量, 甲说什么真因子, 乙就跟着甲说就行了)......这样下去甲一直都是奇数, 乙一直都是偶数, 于是乙必胜.

**题7** 设 $p$ 是个素数, 对任意 $x \in \mathbb{Q}$, 定义 $|x|_p$ 如下:

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ p^{-\alpha}, & x = p^{\alpha} \cdot \dfrac{n}{m}, \alpha \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Z}, (p, mn) = 1, x \neq 0. \end{cases}$$

设数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}, n = 1, 2, \cdots,$

(1)我们称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $p-$ 柯西列, 如果对任意 $\varepsilon > 0,$ 都存在 $N > 0,$ 使得对 $\forall m, n > N$ 都有 $|a_m - a_n|_p < \varepsilon.$

(2)如果存在 $A \in \mathbb{Q},$ 使得对任意 $\varepsilon > 0,$ 都存在 $N > 0,$ 使得对 $\forall n > N$ 都有 $|A - a_n|_p < \varepsilon,$ 则称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $p-$ 收敛于 $A.$

请证明:

(a)如果数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $p-$ 收敛于 $A,$ 则数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $p-$ 柯西列.

(b)数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $p-$ 柯西列当且仅当数列 $\{a_{n+1} - a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $p-$ 收敛于0.

(c)存在 $p-$ 柯西列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足: 对任意 $A \in \mathbb{Q},$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都不 $p-$ 收敛于 $A.$

第 6 题拿到奇数就必须给对方偶数，拿到偶数的如果是 2 就赢，否则固定扣 1 还给对方奇数，所以拿到奇数的必败

第七题前两问直接用定义证就好了吧，注意到 ｜p^nqn-p^mqm｜_p = p^{-min(m,n)}其中 m 和 n 非负整数且不全为 0，qn,qm 是题目中的有理数满足那个互素条件。具体的话第一问设 an = A+p^{sn}qn，由条件有整数列 sn 趋于正无穷，剩下的定义验证即可，同样的第二问设 a_{n+1}-an = p^{sn}qn，am-an 等于∑a_{n+1}-an,提取出 p^{min(sn)}定义验证即可，第三问取 an =

$p+p^2+p^3+....+p^n$,这样对于任意给定的有理数 A 都有$|a_n-A|_p$ 等于 p 或者 1 一定不收敛到 0。