秘密 ★ 启用前 【考试时间：2021年11月1日15：00—17：00】

绵阳市高中2019级第一次诊断性考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|\log_2 x<1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x|-1<x\leqslant 1\}$　B．$\{x|-1<x<1\}$　C．$\{x|0<x\leqslant 1\}$　D．$\{x|0<x<1\}$

2．若 $0<a<b$，则下列结论正确的是

A．$\ln a>\ln b$　B．$b^2<a^2$　C．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　D．$(\frac{1}{2})^a>(\frac{1}{2})^b$

3．设 D，E 为△ABC 所在平面内两点，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，则 $\overrightarrow{DE}=$

A．$-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$　B．$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　D．$-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

4．设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0,\\2x+y-8\leqslant 0,\\y\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $z=3x+4y$ 的最大值是

A．12　B．17　C．18　D．$\frac{39}{2}$

5．通常人们用震级来描述地震的大小．地震震级是对地震本身大小的相对量度，用 M 表示，强制性国家标准 GB17740—1999《地震震级的规定》规定了我国地震震级的计算和使用要求，即通过地震面波质点运动最大值 $(A/T)_{\max}$ 进行测定，计算公式如下：$M=\lg(A/T)_{\max}+1.66\lg\Delta+3.5$（其中 Δ 为震中距），已知某次某地发生了4.8级地震，测得地震面波质点运动最大值为0.01，则震中距大约为

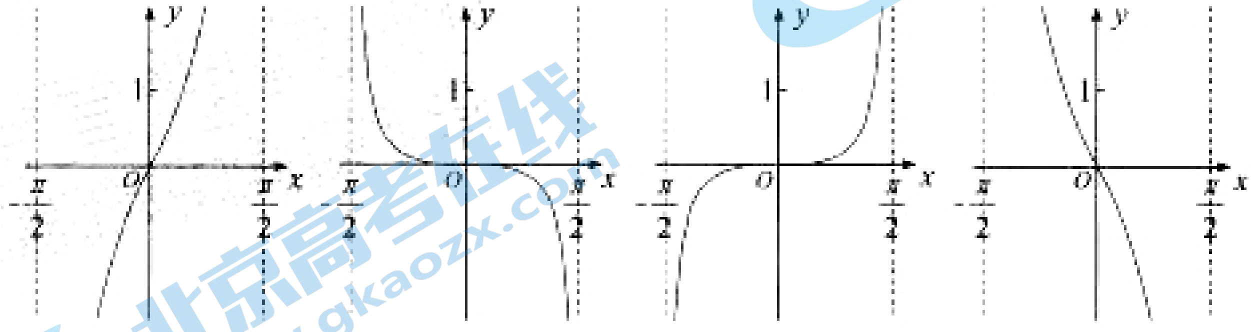
A．58　B．78　C．98　D．118

6. “$(a+1)^{\frac{1}{2}}<(3-2a)^{\frac{1}{2}}$” 是 “$-2<a<\frac{2}{3}$” 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x}$ 在$(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$上的图象大致为



A　　B　　C　　D

8. 已知 $a=(\frac{16}{81})^{-\frac{1}{4}}$，$b=\log_3 2+\log_2 3$，$c=\frac{2}{3}\log_2 3$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $b>c>a$

9. 已知首项为 1 的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $4a_na_{n+1}=16^n$，则下列说法不正确的是

A. 数列$\{a_n\}$是等比数列　　B. 数列$\{S_n\}$为单调递增数列

C. $a_5=256$　　D. $4a_n=3S_n+4^{n-1}$

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<\frac{1}{2},\\ \log_2 x, & x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 则满足 $f(2x-1)<f(x)$ 的 x 的取值范围是

A. $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}]$　　B. $[\frac{3}{4},\ 1)$　　C. $(-\infty,\ \frac{3}{4}]$　　D. $(\frac{1}{2},\ 1)$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足下列三个条件：

①对任意的 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$；②$y=f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称；

③对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=f(x+2)$，则 $f(\frac{1}{3})$，$f(\frac{3}{2})$，$f(\frac{8}{3})$ 的大小关系是

A. $f(\frac{8}{3})>f(\frac{3}{2})>f(\frac{1}{3})$　　B. $f(\frac{8}{3})>f(\frac{1}{3})>f(\frac{3}{2})$

C. $f(\frac{1}{3})>f(\frac{3}{2})>f(\frac{8}{3})$　　D. $f(\frac{3}{2})>f(\frac{8}{3})>f(\frac{1}{3})$

12. 函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$，已知 $|f(\frac{\pi}{3})|=3$，且对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(-\frac{\pi}{6}+x)+f(-\frac{\pi}{6}-x)=0$，若 $f(x)$ 在 $(\frac{5\pi}{36},\ \frac{2\pi}{9})$ 上单调，则 ω 的最大值为

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=2$，$S_7=35$，则 $a_6=$______.

14．已知平面向量 $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(m,\ -1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$______.

15．若 $\tan\alpha=5\tan\frac{\pi}{7}$，则 $\dfrac{\cos(\alpha-\frac{5\pi}{14})}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{7})}=$______.

16．已知函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x-1$，若不等式 $|f(x)|\leq 1$ 对任意的 $x\in[0,\ \pi]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2\omega x+2\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}(\omega>0)$，其图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间；

（2）将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 为偶函数，求 φ 的值.

18．（12 分）

已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=2$，且满足 $S_{n+1}=3S_n+2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19．（12 分）

在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$c=3$，从以下三个条件中任选一个：① $b\tan C=(2a-b)\tan B$；② $2c\cos B=2a-b$；③ $ac\cos A+a^2(\cos C-1)=b^2-c^2$，解答如下的问题.

（1）证明：$a=\sqrt{3}\sin B+3\cos B$；

（2）若 AB 边上的点 P 满足 $AP=2PB$，求线段 CP 的长度的最大值.

20. （12 分）

已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+3a^2x-\frac{5}{3}$．

（1）若 $a=-1$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[-4,\ 2]$ 上的最大值与最小值．

（2）若存在实数 m，使得不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(m,\ +\infty)$，求实数 a 的取值范围．

21. （12 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-bx\ln x-\frac{1}{2}x^2\ (b\in\mathbf{R})$，其图象在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线斜率为 $2e-3$．

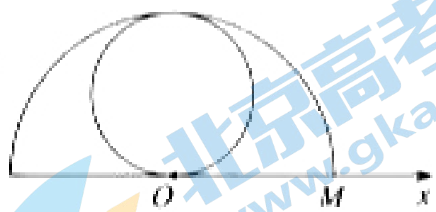
（1）证明：当 $x>1$ 时，$f(x)>xe^x-\frac{3}{2}x^2+1$；

（2）若函数 $g(x)=f(x)+(4-a)x-1$ 在定义域上无极值，求正整数 a 的最大值．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系中，已知点 $M(2,\ 0)$，曲线 C_1 是以极点 O 为圆心，以 OM 为半径的半圆，曲线 C_2 是过极点且与曲线 C_1 相切于点 $(2,\ \frac{\pi}{2})$ 的圆．



（1）分别写出曲线 C_1，C_2 的极坐标方程；

（2）直线 $\theta=\alpha\ (0<\alpha<\pi,\ \rho\in\mathbf{R})$ 与曲线 C_1，C_2 分别相交于点 A，B（异于极点），求 $\triangle ABM$ 面积的最大值．

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+m|-|x-2m|\ (m>0)$ 的最大值为 6．

（1）求 m 的值；

（2）若正数 x，y，z 满足 $x+y+z=m$，求证：$\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leq\sqrt{m}$．

绵阳市高中 2019 级第一次诊断性考试
理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

CDBCC　AABDD　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．7　　14．2　　15．$\dfrac{3}{2}$　　16．$[1，2\sqrt{2}]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）$f(x)=\sqrt{3}(1+\cos 2\omega x)+\sin 2\omega x-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sin 2\omega x$

$=2\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{3})$． ……………………………………4 分

∵相邻对称轴间距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，

∴函数的最小正周期 $T=\pi$，即 $\dfrac{2\pi}{2|\omega|}=\pi(\omega>0)$，解得 $\omega=1$，

∴ $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$． ……………………………………6 分

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{12}+k\pi$（$k\in Z$），

∴函数 $f(x)$ 在 $[0，\dfrac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $[0，\dfrac{\pi}{12}]$． ……………………8 分

（2）将函数 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 个单位后得

$g(x)=2\sin[2(x+\varphi)+\dfrac{\pi}{3}]=2\sin(2x+2\varphi+\dfrac{\pi}{3})$，

∵ $g(x)$ 为偶函数，

∴ $g(0)=\pm 2$，即 $\sin(2\varphi+\dfrac{\pi}{3})=\pm 1$， ……………………………10 分

∴ $2\varphi+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}(k\in Z)$．

又 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，

∴ $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$． ……………………………………12 分

18．解：（1）$\because S_{n+1}=3S_n+2$ ①，

$\therefore S_2=3S_1+2$，即 $a_1+a_2=3a_1+2$．

$\because a_1=2$，$\therefore a_2=6$． ……………………………………………………………2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=3S_{n-1}+2$，②

由①－②得 $a_{n+1}=3a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant 2)$．又 $\dfrac{a_2}{a_1}=3$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 2，公比为 3 的等比数列． ………………………… 5 分

$\therefore a_n=2\times 3^{n-1}$． ……………………………………………………………………… 6 分

（2）由 $n\cdot a_n=2n\cdot 3^{n-1}$，……………………………………………………………7 分

得 $T_n=2(1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+n\times 3^{n-1})$ ①

$3T_n=2(1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n)$ ②

由①－②，得 $-2T_n=2(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)$，

$$-2T_n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-2n\cdot 3^n=(1-2n)3^n-1．$$

$\therefore T_n=(n-\dfrac{1}{2})3^n+\dfrac{1}{2}$． ………………………………………………………12 分

19．解：选择条件①：由 $b\tan C=(2a-b)\tan B$，得 $\dfrac{b\sin C}{\cos C}=\dfrac{(2a-b)\sin B}{\cos B}$，

由正弦定理可得，$\sin B\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\sin B\cos C$．

$\therefore \sin C\cos B=2\sin A\cos C-\sin B\cos C$，

$\therefore 2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(C+B)=\sin A$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$，

$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件②：由正弦定理可得，$2\sin C\cos B=2\sin A-\sin B$，

又 $\sin A=\sin(C+B)$，

$\therefore 2\sin C\cos B=2\sin(C+B)-\sin B=2(\sin C\cos B+\cos C\sin B)-\sin B$，

化简整理得 $2\cos C\sin B=\sin B$，

由 $\sin B\neq 0$，$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$，

又 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件③：由已知得，$b^2+a^2-c^2=ac\cos A+a^2\cos C$，

由余弦定理，得 $b^2+a^2-c^2=2ab\cos C$，

$\because$ $b^2+c^2-a^2=ac\cos C+c^2\cos A$，

$\therefore$ $2ab\cos C=ac\cos A+a^2\cos C$，

$\because$ $a>0$，$\therefore$ $2b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

由正弦定理，有 $2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

$\because$ $\sin B\neq 0$，$\therefore$ $\cos C=\dfrac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore$ $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………4 分

（1）证明：由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ $a=2\sqrt{3}\sin A$，

$\therefore$ $a=2\sqrt{3}\sin A=2\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin B+3\cos B$，得证. ………………………………6 分

（2）由 $AP=2PB$ 及 $AB=3$，可得 $PB=1$，

在$\triangle PBC$ 中，由余弦定理可得，

$CP^2=a^2+1-2a\cos B=(\sqrt{3}\sin B+3\cos B)^2+1-2(\sqrt{3}\sin B+3\cos B)\cos B$

$=4+2\sqrt{3}\sin 2B$. ……………………………………………………………9 分

$\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore$ $B\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$，即 $2B\in(\dfrac{\pi}{3},\pi)$.

当 $2B=\dfrac{\pi}{2}$，即$B=\dfrac{\pi}{4}$时，CP^2 取最大值为 $4+2\sqrt{3}$.

$\therefore$线段 CP 的长度的最大值为 $1+\sqrt{3}$. ……………………………………………12 分

20．解：（1）由题意得 $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$. …………………1 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-(x-1)(x+3)$，$x\in[-4,2]$.

由 $f'(x)>0$，解得 $-3<x<1$；

由 $f'(x)<0$，解得 $-4\leqslant x<-3$ 或 $1<x\leqslant 2$. ……………………………………………3 分

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$(-3,1)$上单调递增，在区间$[-4,-3)$，$(1,2]$单调递减.

又 $f(-4)=-\dfrac{25}{3}$，$f(-3)=-\dfrac{32}{3}$，$f(1)=0$，$f(2)=-\dfrac{7}{3}$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间$[-4,2]$上的最大值为 0，最小值为 $-\dfrac{32}{3}$. ………………6 分

（2）存在实数 m，使不等式 $f(x)<0$ 的解集恰好为 $(m, +\infty)$，

等价于函数 $f(x)$ 只有一个零点.

∵ $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$，

i)当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $3a<x<-a$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(3a, -a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<3a$ 或 $x>-a$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 3a)$，$(-a, +\infty)$ 上单调递减.

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，

∴只需要 $f(-a)<0$，解得 $-1<a<0$.

∴实数 a 的取值范围为 $-1<a<0$.

ii)当 $a=0$ 时，显然 $f(x)$ 只有一个零点成立. ……………………………10 分

iii) 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $-a<x<3a$，

即 $f(x)$ 在区间 $(-a, 3a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<-a$ 或 $x>3a$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -a)$，$(3a, +\infty)$ 上单调递减；

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，∴只需要 $f(3a)<0$，解得 $0<a<\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上：实数 a 的取值范围是 $(-1,\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3})$. ……………………………12 分

21．解：（1）由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x-b(\ln x+1)-x$. ……………………1 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $2e-3$，

∴ $f'(1)=2e-b-1=2e-3$，解得 $b=2$. ……………………………3 分

当 $x>1$ 时，$f(x)>xe^x-\dfrac{3}{2}x^2+1$ 等价于 $x^2-2x\ln x-1>0$，即 $x-2\ln x-\dfrac{1}{x}>0$.

令 $F(x)=x-2\ln x-\dfrac{1}{x}$，

则 $F'(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}>0$.

∴函数 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $F(x)>F(1)=0$，

∴当 $x>1$ 时，$f(x)>xe^x-\dfrac{3}{2}x^2+1$. ……………………………6 分

（2）由题得 $g(x)=xe^x-2x\ln x-\frac{1}{2}x^2+(4-a)x-1$.

若 $g(x)=f(x)+(4-a)x-1$ 无极值，则 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立或 $g'(x)\leqslant 0$ 恒成立.

i) 当 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立时，$g'(x)=(x+1)e^x-2(1+\ln x)-x+4-a\geqslant 0$，

即 $a-2\leqslant[(x+1)e^x-2\ln x-x]_{\min}$.

令 $h(x)=(x+1)e^x-2\ln x-x$.

$\therefore h'(x)=(x+2)e^x-\frac{2}{x}-1=(x+2)e^x-\frac{(x+2)}{x}=(x+2)(e^x-\frac{1}{x})(x>0)$.

令 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，

即 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………8 分

又 $\varphi(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<\sqrt{4}-2=0$，$\varphi(1)=e-1>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $\varphi(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 单调递减.

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}-2\ln x_0-x_0$. ……………………10 分

又 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0=-\ln x_0$，

代入，得 $h(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}-2\ln x_0-x_0=1+\frac{1}{x_0}+2x_0-x_0=1+x_0+\frac{1}{x_0}$.

又 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，则 $h(x_0)==1+x_0+\frac{1}{x_0}\in(3,\frac{7}{2})$.

$\therefore$ 正整数 a 的最大值是 5.

ii) 当 $g'(x)\leqslant 0$ 恒成立时，$g'(x)=(x+1)e^x-2(1+\ln x)-x+4-a\leqslant 0$，

即 $a-2\geqslant[(x+1)e^x-2\ln x-x]_{\max}$，

又由（i）知，函数 $h(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 不存在最大值.

综上：正整数 a 的最大值是 5. ……………………………………………12 分

22．解：（1）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ……………………………………2 分

设 $P(\rho,\ \theta)$ 为曲线 C_2 上的任意一点，

∴ $\rho=2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$．

∴曲线 C_2 极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ……………………………………5 分

（2）∵直线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\ \rho\in\mathbf{R})$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于点 A，B(异于极点)，

∴设 $B(\rho_B,\ \alpha)$，则 $A(\rho_A,\ \alpha)$．

由题意得 $\rho_B=2\sin\alpha$，$\rho_A=2$，

∴ $AB=\rho_A-\rho_B=2-2\sin\alpha$． ……………………………………………………7 分

∵点 M 到直线 AB 的距离 $d=OM\times\sin\alpha=2\sin\alpha$，

∴ $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}(2-2\sin\alpha)\times2\sin\alpha$

$$=2(1-\sin\alpha)\times\sin\alpha\leqslant2\times\frac{(\sin\alpha+1-\sin\alpha)^2}{4}=\frac{1}{2}$$

(当且仅当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)．

∴△ABM 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}$． ……………………………………………10 分

23．解：（1）由题意得 $f(x)=|x+m|-|x-2m|\leqslant|(x+m)-(x-2m)|=|3m|$． ………3 分

∵函数 $f(x)$ 的最大值为 6，

∴ $|3m|=6$，即 $m=\pm2$．

∵ $m>0$，∴ $m=2$． ……………………………………………………………5 分

（2）由（1）知，$x+y+z=2$，∵ $x>0$，$y>0$，$z>0$，

∴ $2=x+y+z=(\frac{x}{2}+y)+(\frac{x}{2}+z)$

$\geqslant2\sqrt{\frac{xy}{2}}+2\sqrt{\frac{xz}{2}}$ (当且仅当 $\frac{x}{2}=y=z$ 时，等号成立)． ……………………………8 分

∴ $\sqrt{2}\sqrt{xy}+\sqrt{2}\sqrt{xz}\leqslant2$，

∴ $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leqslant\sqrt{2}$ (当且仅当 $x=1$，$y=z=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)． ………………10 分