河南省 2020 届高三 3 月联合检测数学

（文科）试题

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 A={1, 2, 3, 6}, B={x | 2^x>4}, 则 A∩B=

A. {6}　　B. {3, 6}　　C. {1, 2}　　D. {2, 3, 6}

2. 若等差数列的前两项分别为 1, 3, 则该数列的前 10 项和为

A. 81　　B. 90　　C. 100　　D. 121

3.设复数 z=a+bi(a,b∈R),定义 $\boxed{z}$=b+ai.若 $\dfrac{\boxed{z}}{1+i}=\dfrac{i}{2-i}$,则 z=

A. $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$　　B. $\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　C. $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$　　D. $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

4.书架上有两套我国四大名著，现从中取出两本。设事件 M 表示“两本都是《红楼梦》”；事件 N 表示“一本是《西游记》，一本是《水浒传》”；事件 P 表示“取出的两本中至少有一本《红楼梦》”。下列结论正确的是

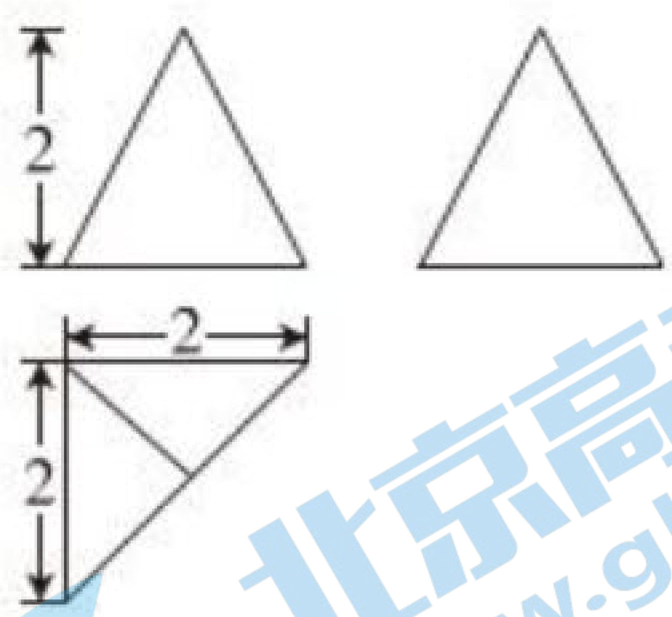
A.M 与 P 是互斥事件　　B.M 与 N 是互斥事件

C.N 与 P 是对立事件　　D. M,N,P 两两互斥

5.若双曲线($C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 3x+2y=0,则 m=

A. $\dfrac{4}{9}$　　B. $\dfrac{9}{4}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

6.已知底面是等腰直角三角形的三棱锥 P-ABC 的三视图如图所示，俯视图中的两个小三角形全等,则



A. PA,PB,PC 两两垂直　　B.三棱锥 P-ABC 的体积为 $\dfrac{8}{3}$

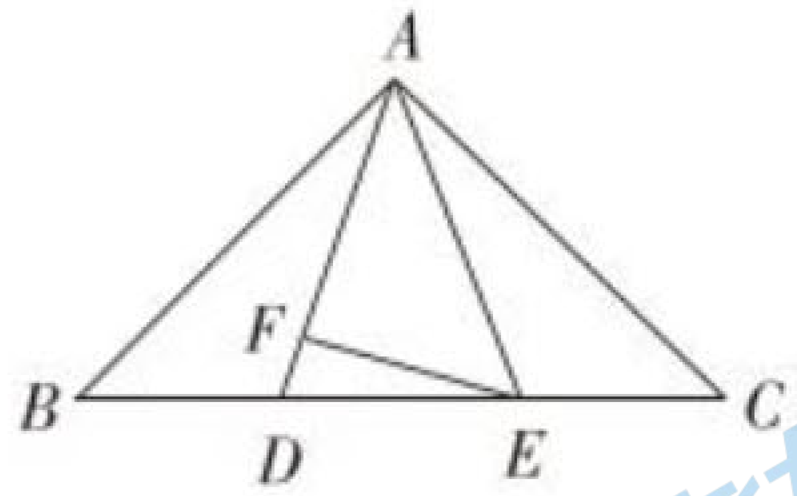
C. $|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$　　D.三棱锥 P-ABC 的侧面积为 $3\sqrt{5}$

7.如图,在等腰直角△ABC 中,D,E 分别为斜边 BC 的三等分点(D 靠近点 B),过 E 作 AD 的垂线,垂足为 F,

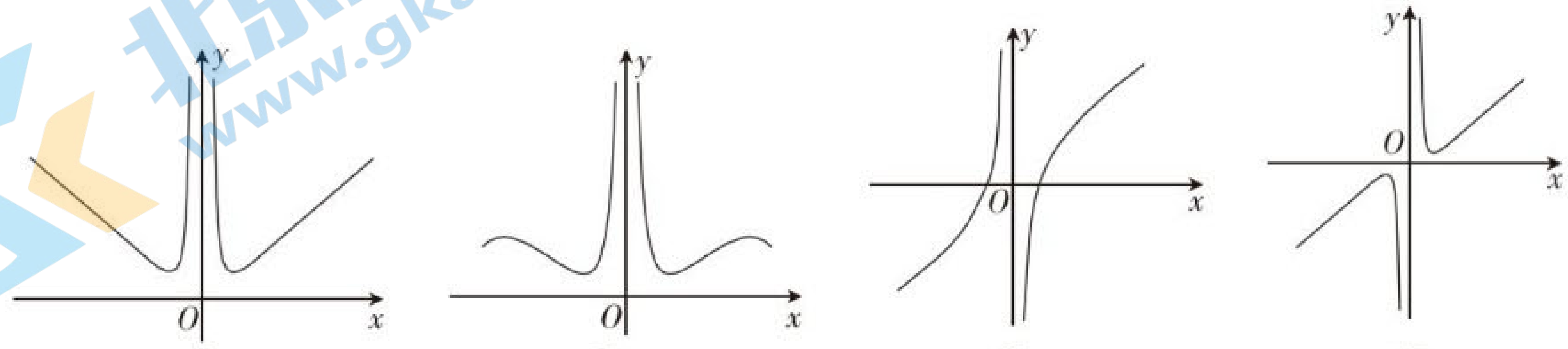
则 $\overrightarrow{AF}=$

$A.\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$　　　　$B.\ \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$C.\frac{4}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$　　　　$D.\ \frac{8}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$



8.函数 $f(x)=|x|-\frac{\ln|x|}{x^2}$ 的图象大致为



A　　　　B　　　　C　　　　D

9.设不等式组 $\begin{cases}x+y\geq 0,\\ x-\sqrt{3}y\leq 0\end{cases}$ 表示的平面区域为Ω,若从圆 $C:x^2+y^2=4$ 的内部随机选取一点P,则P取自Ω的概率为

$A.\ \frac{5}{24}$　　$B.\frac{7}{24}$　　$C.\ \frac{11}{24}$　　$D.\ \frac{17}{24}$

10.张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家，他曾经得出圆周率的平方除以十六等于八分之五.已知三棱锥 A- BCD 的每个顶点都在球 O 的球面上,AB⊥底面 BCD,BC⊥CD,且 $AB=CD=\sqrt{3},B=2$,利用张衡的结论可得球 O 的表面积为

A.30　　$B.10\sqrt{10}$　　C.33　　$D.12\sqrt{10}$

11.已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^x+3,x\leq 0,\\ 2x+\log_9 x^2-9,x>0\end{cases}$，则函数 y= f(f(x))的零点所在区间为

$A.(3,\frac{7}{2})$　　B. (-1,0)　　$C.(\frac{7}{2},4)$　　D. (4,5)

12.已知直线 y=k(x-1)与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A,B 两点,直线 y=2k(x-2)与抛物线 D: $y^2=8x$ 交于 M,N 两点,设 λ =|AB|-2|MN|,则

A.λ<-16　　B.λ=-16　　C.-12<λ<0　　D. λ=-12

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 小题，每小题分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13.函数 $f(x)=9x^2+\sqrt{x-1}$ 的最小值为___.

14.函数 f(x)= |sin 4x|的图象的对称轴方程为___.

15.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 BC_1, BD_1 与底面 ABCD 所成角分别为 α , β ,则 tan(α + β)=

16.在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_n\neq 0,$ 曲线 $y=x^3$ 在点 (a_n,a_n^3) 处的切线经过点($(a_{n+1},0)$ ，下列四个结论:

①$a_2=\frac{2}{3}$;②$a_3=\frac{1}{3}$③$\sum_{i=1}^{4}a_i=\frac{65}{27}$④数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

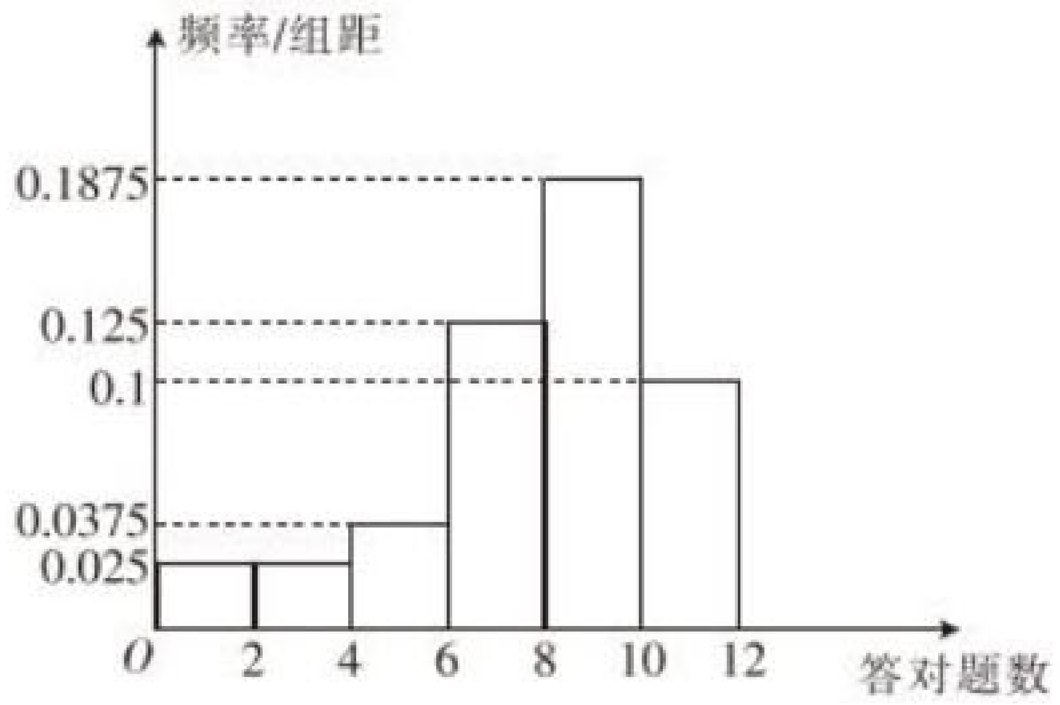
其中所有正确结论的编号是___.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

为了解某中学学生对《中华人民共和国交通安全法》的了解情况,调查部门在该校进行了一次问卷调查(共 12 道题),从该校学生中随机抽取 40 人,统计了每人答对的题数,将统计结果分成[0,2),[2,4),[4,6),[6,8),[8,10),[10,12]六组，得到如下频率分布直方图.



(1)若答对一题得 10 分,未答对不得分,估计这 40 人的成绩的平均分(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2)若从答对题数在[2,6)内的学生中随机抽取 2 人,求恰有 1 人答对题数在[2,4)内的概率.

18.(12 分)

a,b,c 分别为△ABC 内角 A,B,C 的对边.已知 a=3,csin C=sin A+bsin B,且 B= 60°.

(1)求△ABC 的面积;

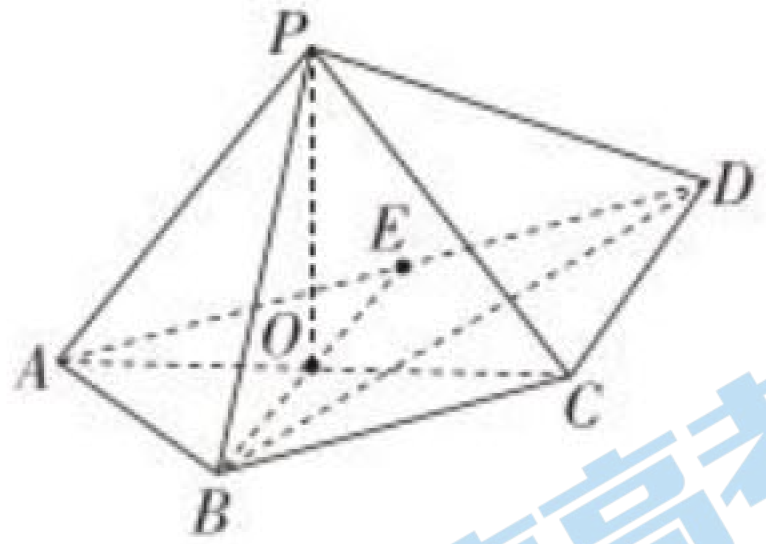
（2）若 D,E 是 BC 边上的三等分点，求 sin∠DAE.

19. (12 分)

如图,在四棱锥 P-ABCD 中,AP⊥平面 PCD,AD // BC,AB⊥BC,AP=AB= BC=$\frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点,AC 与 BE 相交于点 O.

（1）证明：PO⊥平面 ABCD.

（2）若 OB=1，求点 C 到平面 PAB 的距离。



20. (12 分)

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+\frac{4}{27}$.

(1)若 f(x)在(a-1,a+3)上存在极大值,求 a 的取值范围;

(2)若 x 轴是曲线 y= f(x)的-一条切线,证明:当 x≥-1 时 $f(x)\geq x-\frac{23}{27}$.

21.(12 分)

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$)过点 $(1,\frac{3}{2})$,过坐标原点 O 作两条互相垂直的射线与椭圆 C 分别交于 M,N 两点.

(1)证明:当，a^2+9b^2 取得最小值时，椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)若椭圆 C 的焦距为 2,是否存在定圆与直线 MN 总相切?若存在,求定圆的方程;若不存在,请说明理由.

(二)选考题:共 10 分.请考生从第 22,23 两题中任选一题作答.如果多做， 则按所做的第一个题

目计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=-1+2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$ (φ为参数).以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴,建立极坐标系.已知点 P 的直角坐标为(-2,0),过 P 的直线 l 与曲线 C 相交于 M,N 两点.

(1)若 l 的斜率为 2,求 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程;

(2)求 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的值.

23. [选修 $4-5$:不等式选讲](10 分)

已知函数 f(x)=|2x-1|+|2x+1| ,记不等式 f(x)<4 的解集为 M.

(1)求 M;

(2)设 a,b∈M,证明:|ab|-|a|-|b|+1>0.

数学(文科)参考答案

1. B　因为 $B=\{x|x>2\}$，所以 $A\cap B=\{3,6\}$.

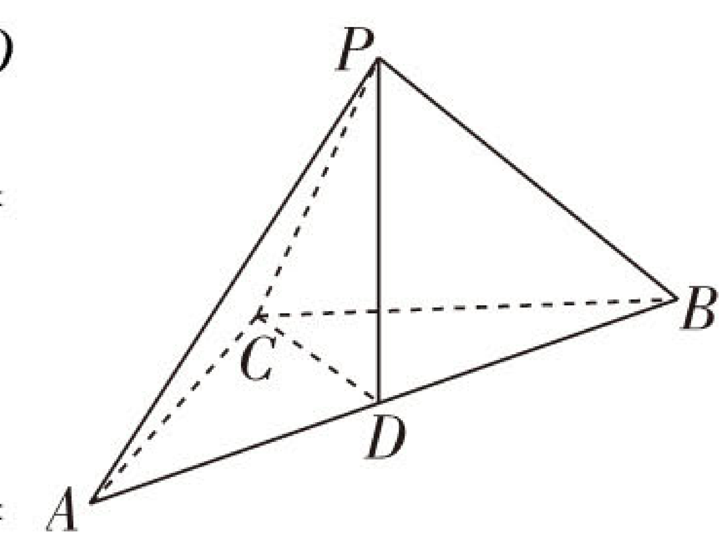
2. C　因为公差 $d=3-1=2$，所以该数列的前 10 项和为 $10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$.

3. B　因为 $\frac{\boxed{z}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，所以 $\boxed{z}=\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$，则 $z=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$.

4. B　M 与 P 是既不是对立也不是互斥事件，M 与 N 是互斥事件，N 与 P 是互斥事件.

5. A　由题意知，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x(m>0)$，$3x+2y=0$ 可化为 $y=-\frac{3}{2}x$，所以 $\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{3}{2}$，解得 $m=\frac{4}{9}$.

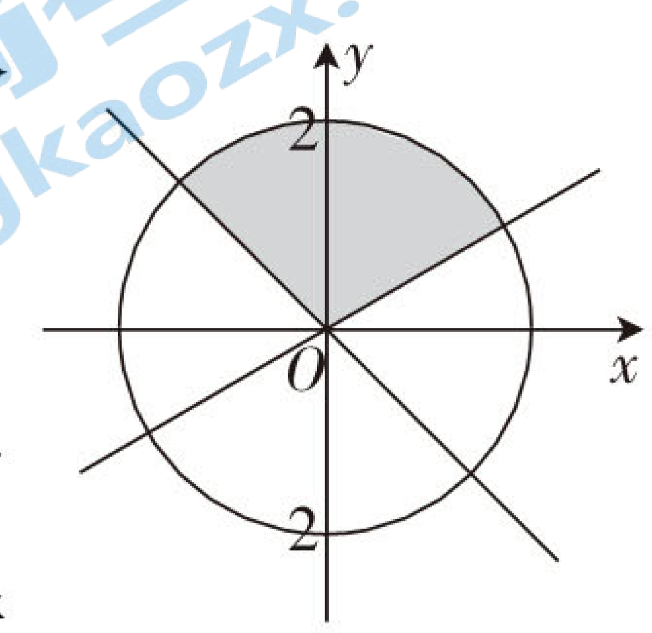
6. C　根据三视图，可得三棱锥 $P-ABC$ 的直观图如图所示，其中 D 为 AB 的中点，$PD\perp$ 底面 ABC. 所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，$|PA|=|PB|=|PC|=\sqrt{6}$，$PA,PB,PC$ 不可能两两垂直，三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.



7. D　设 $BC=6$，则 $DE=2$，$AD=AE=\sqrt{10}$，$\cos\angle DAE=\frac{10+10-4}{2\times10}=\frac{4}{5}$，所以 $\frac{AF}{AD}=\frac{AF}{AE}=\frac{4}{5}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$. 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\times(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{8}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$.

8. A　因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 C 和 D. 当 $x>0$ 时，$f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$，$f'(x)=\frac{x^3+2\ln x-1}{x^3}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)>0$，得 $x>1$. 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，排除 B，故选 A.

9. B　作出 Ω 中在圆 C 内部的区域，如图所示，因为直线 $x+y=0$，$x-\sqrt{3}y=0$ 的倾斜角分别为 $\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$，所以由图可得 P 取自 Ω 的概率为 $\frac{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\frac{7}{24}$.



10. B　因为 $BC\perp CD$，所以 $BD=\sqrt{7}$，又 $AB\perp$ 底面 BCD，所以球 O 的球心为侧棱 AD 的中点，从而球 O 的直径为 $\sqrt{10}$. 利用张衡的结论可得 $\frac{\pi^2}{16}=\frac{5}{8}$，则 $\pi=\sqrt{10}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{10}}{2})^2=10\pi=10\sqrt{10}$.

11. A　当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)\in(3,4]$，此时，$f(x)$ 无零点；
当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=2^x+\log_9x^2-9=2^x+\log_3x-9$ 为增函数，且 $f(3)=0$.
令 $f(f(x))=0$，得 $f(x)=2^x+\log_3x-9=3$，因为 $f(3)=0<3$，$f(\frac{7}{2})=8\sqrt{2}+\log_3\frac{7}{2}-9>3$，
所以函数 $y=f(f(x))$ 的零点所在区间为 $(3,\frac{7}{2})$.

12. D　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$，因为直线 $y=k(x-1)$ 经过 C 的焦点，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}$. 同理可得 $|MN|=8+\frac{2}{k^2}$，所以 $\lambda=4-16=-12$.

13. 9　$\because f(x)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，且 $f(x)$ 在定义域上单调递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=9$.

14. $x=\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$　令 $4x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

15. $3+2\sqrt{2}$　因为 CC_1，DD_1 都与底面 $ABCD$ 垂直，所以 $\alpha=\angle CBC_1$，$\beta=\angle DBD_1$，$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=3+2\sqrt{2}.$$

16. ①③④　$\because y'=3x^2$，$\therefore$ 曲线 $y=x^3$ 在点 (a_n,a_n^3) 处的切线方程为 $y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$，

则 $-a_n^3=3a_n^2(a_{n+1}-a_n)$. $\because a_n\neq 0$，$\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$，则 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.

从而 $a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{4}{9}$，$\sum\limits_{i=1}^{4}a_i=\dfrac{1-(\frac{2}{3})^4}{1-\frac{2}{3}}=\frac{65}{27}$，故所有正确结论的编号是①③④.

17. 解：(1)因为答对题数的平均数约为 $(1\times 0.025+3\times 0.025+5\times 0.0375+7\times 0.125+9\times 0.1875+11\times 0.1)\times 2=7.9$. ……………… 4 分

所以这 40 人的成绩的平均分约为 $7.9\times 10=79$. ……………… 6 分

(2)答对题数在 $[2,4)$ 内的学生有 $0.025\times 2\times 40=2$ 人，记为 A,B；……………… 7 分

答对题数在 $[4,6)$ 内的学生有 $0.0375\times 2\times 40=3$ 人，记为 c,d,e. ……………… 8 分

从答对题数在 $[2,6)$ 内的学生中随机抽取 2 人的情况有 (A,B)，(A,c)，(A,d)，(A,e)，(B,c)，(B,d)，(B,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共 10 种，……………… 10 分

恰有 1 人答对题数在 $[2,4)$ 内的情况有 (A,c)，(A,d)，(A,e)，(B,c)，(B,d)，(B,e)，共 6 种，……………… 11 分

故所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ……………… 12 分

18. 解：(1)$\because c\sin C=\sin A+b\sin B$，$\therefore$ 由正弦定理得 $c^2=a+b^2$. ……………… 1 分

$\because a=3$，$\therefore b^2=c^2-3$. ……………… 2 分

又 $B=60^\circ$，$\therefore b^2=c^2+9-2\times 3\times c\times\frac{1}{2}=c^2-3$，……………… 4 分

$\therefore c=4$，……………… 5 分

$\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{3}$. ……………… 6 分

(2)设 D 靠近点 B，则 $BD=DE=EC=1$. ……………… 7 分

在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $AD=\sqrt{1^2+4^2-2\times 1\times 4\times\cos 60^\circ}=\sqrt{13}$. ……………… 9 分

又 $b=\sqrt{c^2-3}=\sqrt{13}$，$\therefore AC=AD$. ……………… 10 分

$\because DE=EC$，$\therefore AE\perp CD$，……………… 11 分

故 $\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………… 12 分

19. (1)证明：$\because AP\perp$ 平面 PCD，$\therefore AP\perp CD$. ……………… 1 分

$\because AD/\!/BC$，$BC=\frac{1}{2}AD$，$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形，……………… 2 分

$\therefore BE/\!/CD$，

$\therefore AP\perp BE$. ……………… 3 分

又 $\because AB\perp BC$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，且 E 为 AD 的中点，

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 为正方形，$\therefore BE\perp AC$. ……………… 4 分

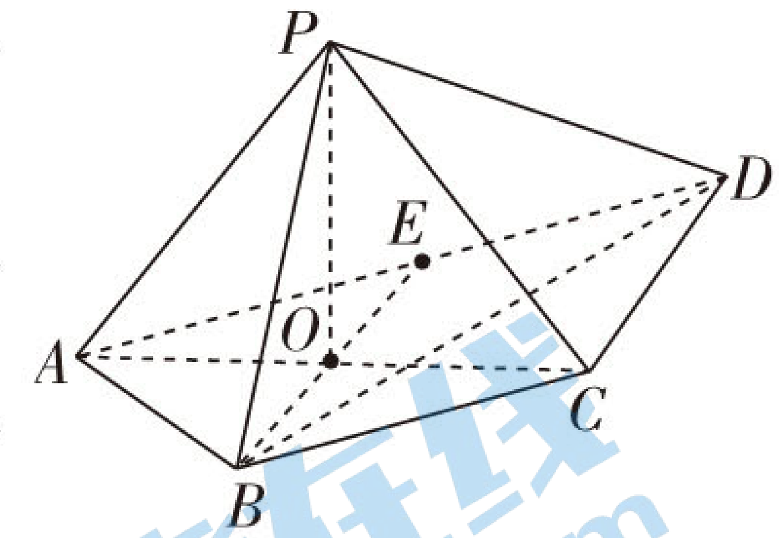
又 $AP\cap AC=A$，$\therefore BE\perp$ 平面 APC，则 $BE\perp PO$. ……………… 5 分

$\because AP\perp$ 平面 PCD，$\therefore AP\perp PC$，又 $AC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AP$，

$\therefore\triangle PAC$ 为等腰直角三角形，O 为斜边 AC 上的中点，……………… 6 分

$\therefore PO\perp AC$ 且 $AC\cap BE=O$，$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$. ……………… 7 分

(2)解：$\because OB=1$，$\therefore PA=PB=AB=\sqrt{2}$. …………………………………… 8 分



设 C 到平面 PAB 的距离为 d，

由 $V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$，…………………………………………………… 9 分

得 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times 1$，………………………… 10 分

解得 $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

20.(1)解：$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{2a}{3}$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 无极值，不合题意；……………………………… 1 分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{2a}{3}$ 处取得极小值，在 $x=0$ 处取得极大值，………………………………… 2 分

则 $a-1<0<a+3$，又 $a>0$，所以 $0<a<1$；……………………………………………………… 3 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{2a}{3}$ 处取得极大值，在 $x=0$ 处取得极小值，………………………………… 4 分

则 $a-1<\frac{2a}{3}<a+3$，又 $a<0$，所以 $-9<a<0$. ……………………………………………… 5 分

综上，a 的取值范围为 $(-9,0)\cup(0,1)$. ………………………………………………………… 6 分

(2)证明：由题意得 $f(0)=0$，或 $f(\frac{2a}{3})=0$，即 $\frac{4}{27}=0$（不成立），或 $-\frac{4}{27}a^3+\frac{4}{27}=0$，………… 7 分

解得 $a=1$. …………………………………………………………………………………………… 8 分

设函数 $g(x)=f(x)-(x-\frac{23}{27})=x^3-x^2-x+1$，$g'(x)=(3x+1)(x-1)$，

当 $-1\leqslant x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)>0$；当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，$g'(x)<0$. ……………………… 9 分

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，且极小值为 $g(1)=0$. ………………………………………… 10 分

又 $g(-1)=0$，所以当 $x\geqslant -1$ 时，$g(x)\geqslant 0$，…………………………………………………… 11 分

故当 $x\geqslant -1$ 时，$f(x)\geqslant x-\frac{23}{27}$. ………………………………………………………… 12 分

21.(1)证明：$\because$ 椭圆 C 经过点 $(1,\frac{3}{2})$，$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，………………………………………… 1 分

$\therefore a^2+9b^2=(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2})(a^2+9b^2)=\frac{85}{4}+\frac{9b^2}{a^2}+\frac{9a^2}{4b^2}\geqslant\frac{85}{4}+2\sqrt{\frac{9b^2}{a^2}\cdot\frac{9a^2}{4b^2}}=\frac{121}{4}$，……………… 2 分

当且仅当 $\frac{9b^2}{a^2}=\frac{9a^2}{4b^2}$，即 $a^2=2b^2$ 时，等号成立，………………………………………………… 3 分

此时椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)解：$\because$ 椭圆 C 的焦距为 2，$\therefore a^2-b^2=1$，又 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，$\therefore a^2=4$，$b^2=3$. ……………… 5 分

当直线 MN 的斜率不存在时，由对称性，设 $M(x_0,x_0)$，$N(x_0,-x_0)$，

$\because M,N$ 在椭圆 C 上，$\therefore \frac{x_0^2}{4}+\frac{x_0^2}{3}=1$，$\therefore x_0^2=\frac{12}{7}$，$\therefore O$ 到直线 MN 的距离 $d=|x_0|=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. … 6 分

当直线 MN 的斜率存在时，设 MN 的方程为 $y=kx+m$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，…………………………………… 7 分

$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，……………………………… 8 分

$\because OM\perp ON$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\therefore x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，…………………………… 9 分

$\therefore (k^2+1)\cdot\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}-\dfrac{8k^2m^2}{3+4k^2}+m^2=0$，即 $7m^2=12(k^2+1)$，…………………………………………… 10 分

$\therefore O$ 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{12}{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………………… 11 分

综上，O 到直线 MN 的距离为定值，且定值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，故存在定圆 O：$x^2+y^2=\dfrac{12}{7}$，使得圆 O 与直线 MN 总相切. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) l 的直角坐标方程为 $y=2(x+2)$，即 $2x-y+4=0$，………………………………………… 1 分

则 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+4=0$. ……………………………………………………… 3 分

曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2+y^2=4$. ……………………………………………………………… 5 分

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，α 为 l 的倾斜角），……………………………… 7 分

代入曲线 C 的普通方程，得 $t^2-2t\cos\alpha-3=0$. ……………………………………………………… 8 分

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=t_1t_2=-3$. ……………………………………………… 10 分

23. (1) 解：$f(x)=\begin{cases}-4x, x\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ 2, -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2},\\ 4x, x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 3 分

由 $f(x)<4$，解得 $-1<x<1$，……………………………………………………………………………… 4 分

故 $M=\{x|-1<x<1\}$. ……………………………………………………………………………………… 5 分

(2) 证明：因为 $a,b\in M$，所以 $|a|<1$，$|b|<1$，………………………………………………………… 7 分

所以 $|ab|-(|a|+|b|)+1=(|a|-1)(|b|-1)>0$，…………………………………………………………… 9 分

所以 $|ab|-|a|-|b|+1>0$. ………………………………………………………………………………… 10 分