通州区 2017—2018 学年第二学期高二年级期末考试

数学(文科)试卷

2018 年 7 月

考 生 须 知	1. 本试卷共 4 页，满分 150 分. 考试时长 120 分钟. 2. 本试卷分为第一部分和第二部分两部分. 3. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2,3,4,5\}$　　B. $\{3\}$　　C. $\{5\}$　　D. $\varnothing$

2. 下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B. $f(x)=x^2$　　C. $f(x)=\cos x$　　D. $f(x)=(\dfrac{1}{2})^{|x|}$

3. 曲线 $y=x^2$ 与 $y=2^x$ 公共点的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$

A. $-\dfrac{2}{9}$　　B. $-\dfrac{7}{9}$　　C. $\dfrac{2}{9}$　　D. $\dfrac{7}{9}$

5. “$\lg x>\lg y$”是“$\sqrt{x}>\sqrt{y}$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知曲线 $C_1: y=\cos x$，$C_2: y=\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$，则下面结论正确的是

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

7. 已知函数 $f(x)=x\sin x$，则 $f(\frac{\pi}{7})$，$f(-1)$，$f(-\frac{\pi}{3})$的大小关系为

A. $f(-\frac{\pi}{3})>f(-1)>f(\frac{\pi}{7})$

B. $f(-1)>f(-\frac{\pi}{3})>f(\frac{\pi}{7})$

C. $f(\frac{\pi}{7})>f(-1)>f(-\frac{\pi}{3})$

D. $f(\frac{\pi}{7})>f(-\frac{\pi}{3})>f(-1)$

8. 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间$[0,1]$上的最大值是 M，最小值是 m，则 $M-m$

A. 与 a 有关，且与 b 有关

B. 与 a 有关，但与 b 无关

C. 与 a 无关，且与 b 无关

D. 与 a 无关，但与 b 有关

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}$的定义域是________.

10. $\frac{\log_4 9}{\log_2 3}$的值是________.

11. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$时，$f(x)=2x^3+x^2$，则 $f(2)=$________.

12. 已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\alpha=$________.

13. 已知函数 $f(x)=\cos x$，对于$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的任意 x_1,x_2，有如下条件：①$x_1>x_2$；②$x_1^2>x_2^2$；③$|x_1|>x_2$，其中能使 $f(x_1)<f(x_2)$恒成立的条件的序号是________.

14. 已知函数 $f(x)=x^2+a(e^x+e^{-x})-2$ 有且只有一个零点，则 $a=$________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, x>0,\\ 2, x=0,\\ 1-2x, x<0.\end{cases}$

（Ⅰ）求 $f[f(2)]$的值；

（Ⅱ）求 $f(a^2+1)$ $(a\in\mathbf{R})$的值；

（Ⅲ）当$-4\leqslant x\leqslant 3$ 时，求函数 $f(x)$的值域.

16.(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+\cos^2 x, x\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$的最小正周期;

(Ⅱ)求函数 $f(x)$的最小值及取得最小值时所对应的 x 的值;

(Ⅲ)求函数 $f(x)$的单调递增区间.

17.(本小题 13 分)

已知$\triangle ABC$ 的对边分别为 a,b,c,且 $a=2,\cos B=\frac{3}{5}$.

(Ⅰ)若 $b=4$,求 $\sin A$ 的值;

(Ⅱ)若$\triangle ABC$ 的面积 $S=4$,求 b,c 的值.

18.(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=\log_2(4^x+1)$.

(Ⅰ)求 $f(1)-f(-1)$的值;

(Ⅱ)设函数 $g(x)=f(x)+kx(k\in\mathbf{R})$,当 k 为何值时,$g(x)$是偶函数?

19.(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{a}{2^x+1}(x\in\mathbf{R})$是奇函数.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)判断函数 $f(x)$的单调性(不用证明);

(Ⅲ)若关于 x 的不等式 $f(-2x^2+1)+f(x^2-tx)\leqslant 0$ 在 $x\in(1,2)$恒成立,求 t 的最大值.

20.(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=e^x\sin x$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(Ⅱ)若 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)\geqslant ax$,求实数 a 的取值范围.

通州区 2017—2018 学年第二学期高二年级期末考试

数学(文科)试卷参考答案及评分标准　2018 年 7 月

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	B	A	D	A	B

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. $\{x \mid x \geqslant 0\}$

10. 1

11. 12

12. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

13. ②

14. 1

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分.

15. 解:(Ⅰ)因为 $f(2)=4-2^2=0$,

所以 $f[f(2)]=f(0)=2$; ………………………………………… 3 分

(Ⅱ)因为 $a^2+1>0$,

所以 $f(a^2+1)=4-(a^2+1)^2=-a^4-2a^2+3$; ……………………… 6 分

(Ⅲ)当 $-4\leqslant x<0$ 时,$f(x)=1-2x$,单调递减,所以 $1<f(x)\leqslant 9$; ……… 8 分

当 $x=0$ 时,$f(x)=2$; ………………………………………… 9 分

当 $0<x\leqslant 3$ 时,$f(x)=4-x^2$,单调递减,所以 $-5\leqslant f(x)<4$. ……… 11 分

所以当 $-4\leqslant x\leqslant 3$ 时,函数 $f(x)$ 的值域是 $[-5,9]$. ……………… 13 分

16. 解:(Ⅰ) 因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ ……………………………… 2 分

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, …………………………………… 4 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$; ……………………………… 5 分

(Ⅱ)当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$,即 $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时, …………………………………… 7 分

函数 $f(x)$取得最小值-2; …………………………………………………………… 9 分

(Ⅲ)当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,………………………………………………… 11 分

即 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,函数 $f(x)$单调递增. …………………………… 12 分

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]$,$k\in\mathbf{Z}$. ……………………… 13 分

17. 解:(Ⅰ)因为 $\cos B=\frac{3}{5}>0$,且 $B\in(0,\pi)$,

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$. ……………………………………………… 3 分

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得,$\frac{2}{\sin A}=\frac{4}{\frac{4}{5}}$, …………………………………………………… 5 分

所以 $\sin A=\frac{2}{5}$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)因为$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$, ……………………………………………………… 8 分

所以 $4=\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{4}{5}$,即 $c=5$. …………………………………………………………………… 9 分

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2^2+5^2-2\times 2\times 5\times\frac{3}{5}=17$. ……………… 12 分

所以 $b=\sqrt{17}$. ……………………………………………………………………………… 13 分

18. 解:(Ⅰ)$f(1)-f(-1)=\log_2 5-\log_2\frac{5}{4}=\log_2(5\times\frac{4}{5})=2$; ……………………… 5 分

(Ⅱ)依题意,得 $g(x)=\log_2(4^x+1)+kx$,定义域为 $\mathbf{R}$. ………………………………… 6 分

$g(x)$是偶函数,等价于 $g(-x)=g(x)$,…………………………………………………………… 7 分

即 $\log_2(4^{-x}+1)-kx=\log_2(4^x+1)+kx$. ………………………………………………… 8 分

所以 $\log_2\frac{4^{-x}+1}{4^x+1}=2kx$. ………………………………………………………………… 9 分

因为 $\log_2\frac{4^{-x}+1}{4^x+1}=\log_2 4^{-x}=\log_2 2^{-2x}=-2x$, ……………………………………… 12 分

所以 $k=-1$. 经检验,当 $k=-1$ 时,函数 $g(x)$是偶函数. ………………………………… 13 分

19. 解：(Ⅰ)因为函数 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{a}{2^x+1}(x\in\mathbf{R})$是奇函数，

所以 $f(0)=0$，即$-\frac{1}{2}+\frac{a}{2^0+1}=0$，

所以 $a=1$. 经检验，当 $a=1$ 时，$f(x)$为奇函数；…… 3 分

(Ⅱ)函数 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$是 $\mathbf{R}$ 上的单调递减函数；…… 6 分

(Ⅲ)因为函数 $f(x)$是奇函数，

所以 $f(-2x^2+1)+f(x^2-tx)\leqslant 0$ 等价于 $f(-2x^2+1)\leqslant f(-x^2+tx)$. …… 8 分

又函数 $f(x)$是单调递减函数，

所以$-2x^2+1\geqslant -x^2+tx$，即 $tx\leqslant -x^2+1$. …… 10 分

所以 $t\leqslant -x+\frac{1}{x}$在 $x\in(1,2)$恒成立. …… 11 分

设 $g(x)=-x+\frac{1}{x}$，$x\in(1,2)$，显然，$g(x)$是减函数. …… 12 分

所以 $g(x)$的值域是$(-\frac{3}{2},0)$，…… 13 分

所以 t 的最大值为$-\frac{3}{2}$. …… 14 分

20. 解：(Ⅰ)由 $f(x)=e^x\sin x$，

得 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，$x\in\mathbf{R}$. …… 1 分

所以 $f'(0)=1$. …… 2 分

又 $f(0)=e^0\sin 0=0$，…… 3 分

所以曲线 $y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=x$；…… 4 分

(Ⅱ)设 $g(x)=f(x)-ax$，则 $g(x)\geqslant 0$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$恒成立.

由(Ⅰ)知，$g'(x)=f'(x)-a=e^x(\sin x+\cos x)-a$，…… 5 分

令 $h(x)=f'(x)$，

则 $h'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$. …… 6 分

因为当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$\cos x\geqslant 0$，

所以当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$h'(x)\geqslant 0$. …… 7 分

所以 $h(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，即 $f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，

所以 $g'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增. ………………………………………………………… 8 分

因为 $f'(0)=1, f'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}$，

所以 $1\leqslant f'(x)\leqslant e^{\frac{\pi}{2}}$. ………………………………………………………… 9 分

当 $a\leqslant 1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，符合题意； ………………………………………………… 10 分

当 $a\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递减，

所以 $g(\frac{\pi}{2})<g(0)=0$，不符合题意； ………………………………………………… 11 分

当 $1<a<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，由于 $g'(0)=1-a<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-a>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(x_0)=0$. ………………………………………………… 12 分

所以在 $x\in[0,x_0]$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $[0,x_0]$ 单调递减.

所以 $g(x_0)<g(0)=0$，不符合题意. ………………………………………………… 13 分

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ………………………………………………… 14 分

注：解答题学生若有其他解法，请酌情给分.