2022 北京八中高二（上）期末

数　　学

一、选择题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.（5 分）已知 $A(2,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，则直线 AB 的倾斜角为(　　)

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

2.（5 分）$(1+x)^4$ 展开式中第 3 项的二项式系数为(　　)

A．6　　B．-6　　C．24　　D．-2

3.（5 分）若直线 $y=kx$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 相交，则 k 的取值范围是(　　)

A．$(0,\frac{2}{3})$　　B．$(-\frac{2}{3},0)$

C．$(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$　　D．$(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},+\infty)$

4.（5 分）从甲地到乙地要经过 3 个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，一辆车从甲地到乙地，恰好遇到 2 个红灯的概率为(　　)

A．$\frac{1}{24}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{11}{24}$　　D．$\frac{3}{8}$

5.（5 分）已知平面 α，β 的法向量分别为 $\vec{u}=(3，-1，4)$，$\vec{v}=(-2，3，-5)$，则(　　)

A．$\alpha//\beta$　　B．$\alpha\perp\beta$

C．α，β 相交但不垂直　　D．α，β 的位置关系不确定

6.（5 分）甲、乙、丙、丁、戊五人随机地排成一行，则甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻的概率为(　　)

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{5}{12}$

7.（5 分）已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$，$CC_1=2$，则平面 A_1BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的余弦值为(　　)

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

8.（5 分）抛掷一枚质地均匀的骰子两次，记 $A=\{$两次的点数均为偶数$\}$，$B=\{$两次的点数之和为 8$\}$，则 $P(B|A)=$(　　)

A．$\frac{1}{12}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

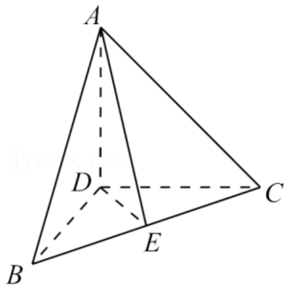
9.（5 分）已知直线 $l_1:x-y+4=0$ 和直线 $l_2:x=-2$，抛物线 $y^2=8x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是(　　)

A．$3\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$\frac{5}{2}\sqrt{2}$　　D．$2+2\sqrt{2}$

10.（5 分）为迎接第 24 届冬季奥运会，某校安排甲、乙、丙、丁、戊共 5 名学生担任冰球、冰壶和短道速滑三个项目的志愿者，每个比赛项目至少安排 1 人，每人只能安排到 1 个项目，则所有排法的总数为(　　)

A．60　　B．120　　C．150　　D．240

11.（5 分）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，DA，DB，DC 两两垂直，且 $DB=DC=2$，点 E 为 BC 中点，若直线 AE 与 CD 所成的角为 60°，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积等于(　　)



A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．2　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12.（5 分）已知曲线 $W:\sqrt{x^2+y^2}+|y|=1$，则曲线 W 上的点到原点距离的最小值是(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$2-\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}-1$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

13.（5 分）$(\frac{2}{x}+ax)^9$ 的展开式中，各项系数之和为 1，则实数 $a=$____.（用数字填写答案）

14.（5 分）已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为____.

15.（5 分）随机变量 ξ 的取值为 0，1，2，若 $P(\xi=0)=\frac{1}{5}$，$E(\xi)=1$，则 $D(\xi)=$____.

16.（5 分）已知点 $A(-2,-1)$ 和 $B(2,3)$，圆 $C:x^2+y^2=m$，当圆 C 与线段 AB 没有公共点时，则实数 m 的取值范围为____.

17.（5 分）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则下列说法中，正确的有____.（请填入所有正确说法的序号）

①当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值；

②当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值；

③当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$；

④当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P.

三、解答题共 5 道小题，共 65 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

18.（10 分）某外语学校的一个社团中有 7 名同学，其中 2 人只会法语，2 人只会英语，3 人既会法语又会英语，现选派 3 人到法国的学校交流访问.

（1）在选派的 3 人中恰有 2 人会法语的概率；

（2）在选派的 3 人中既会法语又会英语的人数 ξ 的分布列与期望.

19.（12 分）已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程是 $x=-\frac{1}{2}$，直线 $x-y-2=0$ 与抛物线相交于 M 、 N 两点.

（I）求抛物线的方程;

（II）求弦长 $|MN|$;

（III）设 O 为坐标原点，证明：$OM\perp ON$.

20.（13 分）一款小游戏的规则如下：每盘游戏都需抛掷骰子三次，出现一次或两次“6 点”获得 15 分，出现三次“6 点”获得 120 分，没有出现“6 点”则扣除 12 分（即获得 -12 分）.

（I）设每盘游戏中出现“6 点”的次数为 X ，求 X 的分布列;

（II）玩两盘游戏，求两盘中至少有一盘获得 15 分的概率;

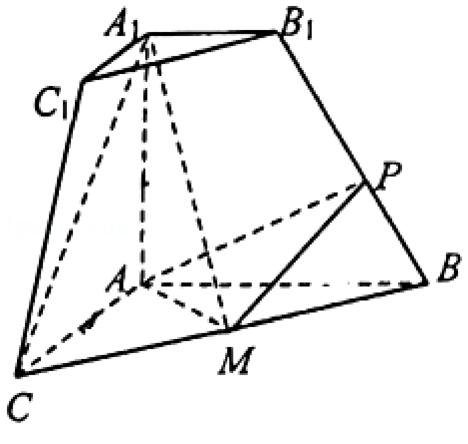
（III）玩过这款游戏的许多人发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析解释上述现象.

21.（15 分）如图，在直角梯形 AA_1B_1B 中，$\angle A_1AB=90°$ ，$A_1B_1//AB$ ，$AB=AA_1=2A_1B_1=2$. 直角梯形 AA_1C_1C 通过直角梯形 AA_1B_1B 以直线 AA_1 为轴旋转得到，且使得平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 AA_1B_1B . M 为线段 BC 的中点. P 为线段 BB_1 上的动点.

（I）求证：$A_1C_1\perp AP$;

（II）当点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PB_1}$ 时，求证：直线 A_1C // 平面 AMP ;

（III）是否存在点 P ，使直线 MP 与平面 A_1CM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{45}$ ？若存在，试确定 P 点的位置；若不存在，请说明理由.

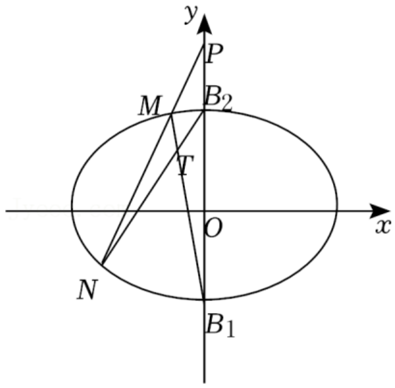


22.（15 分）如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴端点为 B_1 、 B_2 ，且 $|B_1B_2|=2$ ，椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $P(0,2)$ ，过点 P 的动直线 l 椭圆 C 交于不同的两点 M 、 N （与 B_1 ，B_2 均不重合），连接 MB_1 ，NB_2 ，交于点 T .

（I）求椭圆 C 的方程;

（II）求证：当直线 l 绕点 P 旋转时，点 T 总在一条定直线上运动;

（III）是否存在直线 l ，使得 $|MT|\cdot|NT|=|B_1T|\cdot|B_2T|$ ？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.


y
P
M
B2
T
O
x
N
B1

参考答案

一、选择题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】先求出直线 AB 的斜率，由此能求出直线 AB 的倾斜角.

【解答】解：$\because A(2,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，

$\therefore$ 直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{0-\sqrt{3}}{1-2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

故选：B.

【点评】本题考查直线的倾斜角的求法，考查斜率计算公式、直线的倾斜角等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2.【分析】由题意知利用二项展开式的通项公式即可求出展开式中第 3 项的二项式系数.

【解答】解：$(1+x)^4$ 展开式中第 3 项的二项式系数为 $C_4^2=6$，

故选：A.

【点评】本题主要考查二项式定理，二项式系数的求法，考查运算求解能力，属于基础题.

3.【分析】直线 $y=kx$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 无公共点，求出双曲线的渐近线，即可推出 k 的范围.

【解答】解：由题意直线 $y=kx$ 恒过原点，双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的渐近线为：$y=\pm\dfrac{2}{3}x$，

$\because$ 直线 $y=kx$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 相交，

$\therefore -\dfrac{2}{3}<k<\dfrac{2}{3}$.

故选：C.

【点评】本题考查直线与圆锥曲线的关系，解题的关键是将两曲线有交点的问题转化为方程有根的问题，这是研究两曲线有交点的问题时常用的转化方向.

4.【分析】利用相互独立事件概率乘法公式、互斥事件概率加法公式直接求解.

【解答】解：从甲地到乙地要经过 3 个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，

一辆车从甲地到乙地，恰好遇到 2 个红灯的概率为：

$$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}+(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

故选：B.

【点评】本题考查概率的求法，考查相互独立事件概率乘法公式、互斥事件概率加法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

5.【分析】由 $\dfrac{3}{-2}\neq\dfrac{3}{-1}\neq\dfrac{-5}{4}$，得 α，β 不平行，由 $\vec{u}\cdot\vec{v}=-29\neq 0$，得 α，β 不垂直；从而 α，β 相交但不垂直.

【解答】解：平面α，β的法向量分别为$\vec{u}=(3,\ -1,\ 4)$，$\vec{v}=(-2,\ 3,\ -5)$，

对于A，$\because \frac{3}{-2}\neq\frac{3}{-1}\neq\frac{-5}{4}$，$\therefore\alpha$，$\beta$不平行，故$A$错误；

对于B，$\vec{u}\cdot\vec{v}=-6-3-20=-29\neq 0$，$\therefore\alpha$，$\beta$不垂直；

对于C，由A，B得α，β相交但不垂直，故C正确；

对于D，α，β相交但不垂直，故D错误.

故选：C.

【点评】本题考查两个平面的位置关系的判断，考查法向量、面面平行、面面垂直的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

6.【分析】利用排列求出基本事件总数和A事件包含的基本事件数，再利用古典概型的概率公式求解即可.

【解答】解：设甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻为事件A，

$\because$基本事件总数为$A_5^5=120$，

A事件包含的基本事件数为$A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_3^2=24$，

$\therefore P$（A）$=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$，

故选：A.

【点评】本题考查古典概型，排列组合的应用，是基础题.

7.【分析】以D为坐标原点，DA为x轴，DC为y轴，DD_1为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出平面A_1BC_1与平面$ABCD$所成的锐二面角的余弦值.

【解答】解：以D为坐标原点，DA为x轴，DC为y轴，DD_1为z轴，建立空间直角坐标系，

则$A_1(4,\ 0,\ 2)$，$B(4,\ 4,\ 0)$，$C_1(0,\ 4,\ 2)$，

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(0,\ 4,\ -2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-4,\ 4,\ 0)$，

设平面A_1BC_1的一个法向量为$\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{m}=4y-2z=0\\ \overrightarrow{A_1C_1}=-4x+4y=0\end{cases}$，取$z=2$，则$\vec{m}=(1,\ 1,\ 2)$，

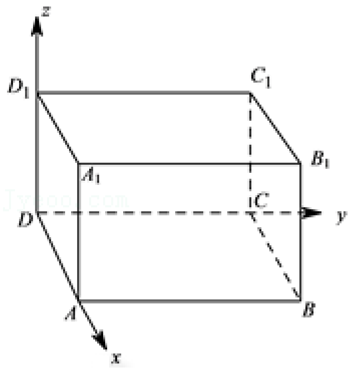
平面$ABCD$的一个法向量为$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$，

设平面A_1BC_1与平面$ABCD$所成的锐二面角的平面角为θ，

则平面A_1BC_1与平面$ABCD$所成的锐二面角的余弦值为：

$\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：A.



【点评】本题考查二面角的余弦值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

8.【分析】此是一个条件概率模型的题，可以求出事件 A 包含的基本事件数，与在 A 发生的条件下，事件 B 包含的基本事件数，再用公式求出概率.

【解答】解：由题意事件记 $A=\{$两次的点数均为偶数$\}$，包含的基本事件数是 $(2,2)$，$(2,4)$，$(2,6)$，$(4,2)$，$(4,4)$，$(4,6)$，$(6,2)$，$(6,4)$，$(6,6)$ 共 9 个基本事件，

在 A 发生的条件下，$B=\{$两次的点数之和为$8\}$，

包含的基本事件数是{2， 6}，{4， 4}，{6， 2}共 3 个基本事件，

$\therefore P(B|A)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.

故选：C.

【点评】本题考查条件概率，考查学生的计算能力，属于中档题.

9.【分析】根据已知条件，结合抛物线的定义，可得点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和 $d=PB+PA=PB+PF$，当 B，P，F 三点共线时，$PB+PF$ 最小，再结合点到直线的距离公式，即可求解.

【解答】解：$\because$ 抛物线 $y^2=8x$，

$\therefore$ 抛物线的准线为 $x=-2$，焦点为 $F(2,0)$，

$\therefore$ 点 P 到准线 $x=-2$ 的距离 PA 等于点 P 到焦点 F 的距离 PF，即 $PA=PF$，

$\therefore$ 点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和 $d=PB+PA=PB+PF$，

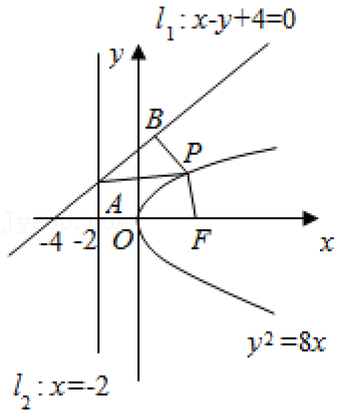
$\therefore$ 当 B，P，F 三点共线时，$PB+PF$ 最小，

$\because d'=\dfrac{|2-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$，

$\therefore d_{min}=d'=3\sqrt{2}$，

$\therefore$ 点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值为 $3\sqrt{2}$.

故选：A.



【点评】本题主要考查抛物线的性质，考查数形结合的能力，属于中档题．

10．【分析】先将 5 名志愿者分为两组，然后每组全排列即可．

【解答】解：5 名志愿者可分为如下的两组，

①一组 3 人，其余两组都是 1 人，则排法为$\dfrac{C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 60$，

②一组 1 人，其余两组都是 2 人，则排法为$\dfrac{C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90$，

$\therefore$所有排法的总数为$60+90=150$，

故选：C．

【点评】本题主要考查排列组合的应用，利用先分组后排列的方法是解决本题的关键，是中档题．

11．【分析】以 D 为原点，DB 为 x 轴，DC 为 y 轴，DA 为 z 轴建立空间直角坐标系，利用数量积求夹角可得 AD，再由棱锥体积公式求解．

【解答】解：如图，以 D 为原点，DB 为 x 轴，DC 为 y 轴，DA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $AD=a$，则 $A(0，0，a)$，$D(0，0，0)$，$C(0，2，0)$，$E(1，1，0)$，

$\overrightarrow{AE}=(1，1，-a)$，$\overrightarrow{DC}=(0，2，0)$，

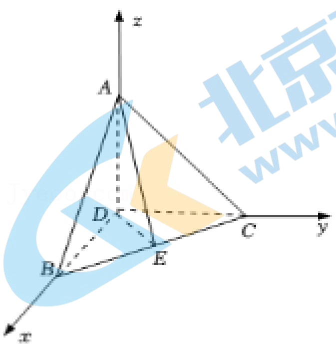
设直线 AE 与 DC 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{DC}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2+a^2}\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $a=\sqrt{2}$．

$\therefore V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BDC}\cdot DA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

故选：D．



【点评】本题考查多面体体积的求法，训练了利用空间向量求解空间角，考查运算求解能力，是中档题.

12.【分析】化简方程$\sqrt{x^2+y^2}+|y|=1$，得到$x^2=1-2|y|$，作出曲线W的图形，通过图象观察，即可得到原点距离的最小值.

【解答】解：$\sqrt{x^2+y^2}+|y|=1$即为

$\sqrt{x^2+y^2}=1-|y|$，

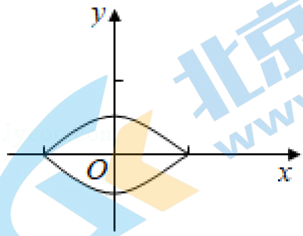
两边平方，可得$x^2+y^2=1+y^2-2|y|$，

即有$x^2=1-2|y|$，

作出曲线W的图形，如右：

则由图象可得，O与点$(0,\frac{1}{2})$或$(0,-\frac{1}{2})$的距离最小，且为$\frac{1}{2}$.

故选：A.



【点评】本题考查曲线方程的化简，考查两点的距离公式的运用，考查数形结合的思想方法，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

13.【分析】通过给二项式中的x赋值 1 求出展开式的各项系数和，即可求出a.

【解答】解：令$x=1$，得各项系数之和为$(2+a)^9=1$，解得$a=-1$.

故答案为：-1.

【点评】本题考查二项式定理，在求二项展开式的各项系数和问题时常用赋值法，属于基础题.

14.【分析】利用椭圆的定义，结合基本不等式，转化求解即可.

【解答】解：F_1，F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$M$在$C$上，$|MF_1|+|MF_2|=6$，

所以$|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2})^2=9$，当且仅当$|MF_1|=|MF_2|=3$时，取等号，

所以$|MF_1|\cdot|MF_2|$的最大值为 9.

故答案为：9.

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，基本不等式的应用，是基础题.

15.【分析】结合方差的计算公式可知，应先求出$P(\xi=1)$，$P(\xi=2)$，根据已知条件结合分布列的性质和期望的计算公式不难求得.

【解答】解析：设$P(\xi=1)=p$，$P(\xi=2)=q$，则由已知得$p+q=\frac{4}{5}$，$0\times\frac{1}{5}+1\times p+2q=1$，

解得$p=\frac{3}{5}$，$q=\frac{1}{5}$，

所以 $D(\xi)=(0-1)^2\times\frac{1}{5}+(1-1)^2\times\frac{3}{5}+(2-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

故答案为：$\frac{2}{5}$

【点评】本题综合考查了分布列的性质以及期望、方差的计算公式.

16.【分析】当点 $A(-2,-1)$ 和 $B(2,3)$ 都在圆的内部时，$m^2>4+9=13$，解得 $m>\sqrt{13}$ 或 $m<-\sqrt{13}$，再结合点到直线的距离公式，即可求解.

【解答】解：当点 $A(-2,-1)$ 和 $B(2,3)$ 都在圆的内部时，$m^2>4+9=13$，解得 $m>\sqrt{13}$ 或 $m<-\sqrt{13}$，

直线 AB 的方程为 $y-3=\frac{-1-3}{-2-2}(x-2)$，即 $x-y+1=0$，

圆心 $O(0,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当圆心 $(0,0)$ 到直线 AB 的距离大于半径时，

有 $\frac{\sqrt{2}}{2}>|m|\neq 0$，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$ 或 $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\{m\,|\,m>\sqrt{13}$ 或 $m<-\sqrt{13}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$ 或 $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

故答案为：$\{m\,|\,m>\sqrt{13}$ 或 $m<-\sqrt{13}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$ 或 $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

【点评】本题主要考查直线与圆的位置关系，考查计算能力，属于中档题.

17.【分析】①结合 $\lambda=1$ 得到 P 在线段 CC_1 上，结合图形可知不同位置下周长不同；

②由线面平行得到点到平面距离不变，故体积为定值；

③结合图形得到不同位置下有 $A_1P\perp BP$，判断出③错误；

④结合图形得到有唯一的点 P，使得线面垂直.

【解答】解：由题意得：$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\lambda\in[0，1]$，$\mu\in[0，1]$，所以 P 为正方形 BCC_1B_1 内一点，

①当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，即 $\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\mu\in[0，1]$，

所以 P 在线段 CC_1 上，所以△ AB_1P 周长为 AB_1+AP+B_1P，

如图 1 所示，当点 P 在 P_1，P_2 处时，$B_1P_1+AP_1\neq B_1P_2+AP_2$，故①错误；

②如图 2，当 $\mu=1$ 时，即 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$，即 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in[0，1]$，

所以 P 在 B_1C_1 上，$V_{P-A1BC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A1BC}\cdot h$，

因为 $B_1C_1//BC$，$B_1C_1\not\subset$ 平面 $A_1BC\subset$，$BC\subset$ 平面 A_1BC，所以点 P 到平面 A_1BC 距离不变，即 h 不变，故②正确；

③当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，即 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，如图 3，

M 为 B_1C_1 中点，N 为 BC 的中点，P 是 MN 上一动点，

易知当 $\mu=0$ 时，点 P 与点 N 重合时，由于△ ABC 为等边三角形， N 为 BC 中点，

所以 $AN\perp BC$ ，又 $AA_1\perp BC$ ， $AA_1\bigcap AN=A$ ，

所以 $BN\perp$ 平面 $ANMA_1$，

因为 $A_1P\subset$ 平面 $ANMA_1$，则 $BP\perp A_1P$ ，

当 $\mu=1$ 时，点 P 与点 M 重合时，可证明出 $A_1M\perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

而 $BM\subset$ 平面 BCC_1B_1 ，则 $A_1M\perp BM$ ，即 $A_1P\perp BP$ ，故③错误；

④，当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，即 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$ ，如图 4 所示， D 为 BB_1 的中点， E 为 CC_1 的中点，

则 P 为 DE 上一动点，易知 $A_1B\perp AB_1$ ，

若 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P ，只需 $A_1B\perp B_1P$ 即可，

取 B_1C_1 的中点 F ，连接 A_1F ， BF ，

又因为 $A_1F\perp$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $A_1F\perp PB_1$ ，

若 $A_1B\perp PB_1$ ，只需 $B_1P\perp$ 平面 A_1FB ，即 $B_1P\perp FB$ 即可，

如图 5，易知当且仅当点 P 与点 E 重合时， $B_1P\perp FB$ 故只有一个点 P 符合要求，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P ，故④正确.

故答案为：②④.

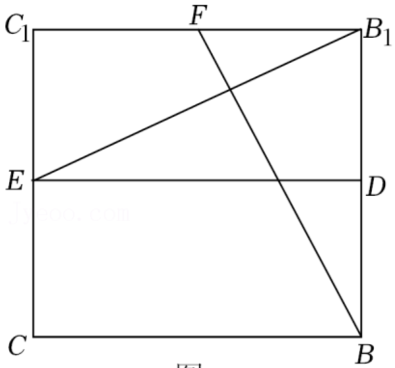


图5

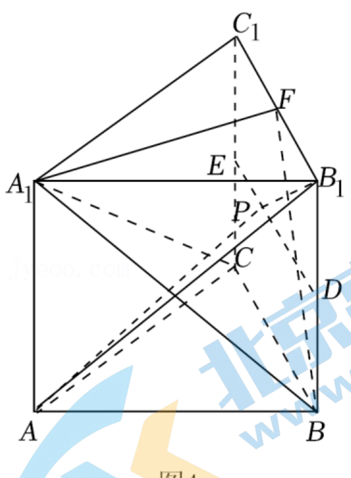


图4

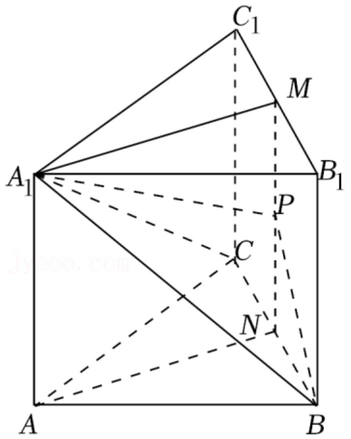


图3

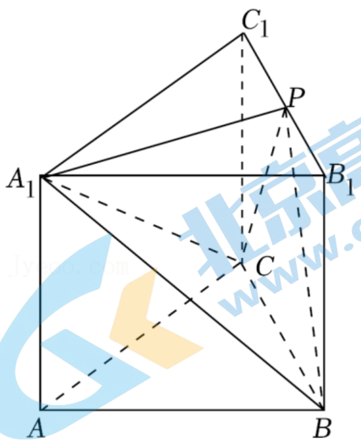


图2

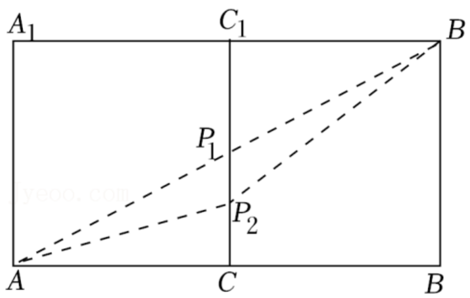


图1

【点评】本题考查了线面平行，线面垂直的相关知识及用特殊点，特殊值进行排除选项，或者用等体积法进行转化等思路进行解决，难点在于对每一选项作出对应图象，属于难题.

三、解答题共 5 道小题，共 65 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

18.【分析】（1）直接利用古典概型的概率计算方法求解即可.

（2）ξ 的取值为 0、1、2、3，求出对应的概率，得到分布列然后求解期望.

【解答】解：（1）事件 A “选派的三人中恰有 2 人会法语的概率为 $P(A)=\dfrac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\dfrac{4}{7}$；…（5 分）

（2） ξ 的取值为 0、1、2、3， 则 $P(\xi=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$， $P(\xi=1)=\dfrac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$， $P(\xi=2)=\dfrac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，

$P(\xi=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$；

分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$E\xi = 1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$． …（13 分）

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列的应用，期望的求法，考查计算能力．

19．【分析】（1） $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，故 $p=1$．由此能求出抛物线方程．

（2）将直线与抛物线联立得到关于 M， N 的韦达定理，利用弦长公式 $MN=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$．

（3）将 $x=y+2$ 代入 $y^2=2x$，得 $y^2-2y-4=0$，设 $M(x_1，\ y_1)$，$N(x_2，\ y_2)$，则 $y_1y_2=-4$，由 $y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$，得 $x_1x_2=4$，由此能导出 $OM\perp ON$．

【解答】解：（1）$\because y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=?\frac{p}{2}$，

$\therefore p=1$．

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=2x$．

（2）将 $x=y+2$ 代入 $y^2=2x$，消去 x，整理，得 $y^2-2y-4=0$，

设 $M(x_1，\ y_1)$，$N(x_2，\ y_2)$，

$\because M$，N 的纵坐标 y_1，y_2 是 $y^2-2y-4=0$ 的两个根，

$\therefore y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-4$，

$MN=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+1}\sqrt{4+16}=2\sqrt{10}$，

（3）证明：将 $x=y+2$ 代入 $y^2=2x$，消去 x，整理，得 $y^2-2y-4=0$，

设 $M(x_1，\ y_1)$，$N(x_2，\ y_2)$，

$\because M$，N 的纵坐标 y_1，y_2 是 $y^2-2y-4=0$ 的两个根，

$\therefore y_1y_2=-4$，

由 $y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$，

得 $y_1^2y_2^2=4x_1x_2$，

$\therefore x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4}=4$，

$\because \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\therefore \overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$，

$\therefore OM\perp ON$．

【点评】本题主要考查抛物线与直线联立后的弦长公式及韦达定理的联立，属于抛物线的中档题

20．【分析】$(I)X$ 的可能取值为 0，1，2，3．每次抛掷骰子，出现“6 点”的概率为 $P=\frac{1}{6}$．利用二项分布列的计算公式即可得出．

（II）设“第 i 盘游戏获得分 15 分”为事件 $A_i(i=1,2)$，利用互斥事件与对立事件的概率计算公式即可得出．

（III）设每盘游戏得分为 Y．由（I）知 Y 的分布列，即可得出结论．

【解答】解：（I） X 可能的取值为 0，1，2，3．

每次抛掷骰子，出现“6 点”的概率为 $P=\frac{1}{6}$．

$P(X=0)=C_3^0(1-\frac{1}{6})^3=\frac{125}{216}$， $P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{6})^2=\frac{75}{216}$，

$P(X=2)=C_3^2\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(1-\frac{1}{6})=\frac{15}{216}$， $P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

（II）设“第 i 盘游戏获得”为事件 $A_i(i=1,2)$，则 $P(A_1)=P(A_2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$．

所以“两盘游戏中至少有一次获得 15 分”的概率为 $1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=\frac{95}{144}$．

因此，玩两盘游戏至少有一次获得 15 分的概率为 $\frac{95}{144}$．

（III）设每盘游戏得分为 Y．

由（I）知，Y 的分布列为：

Y	-12	15	120
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{216}$

Y 的数学期望为 $EY=-12\times\frac{125}{216}+15\times\frac{5}{12}+120\times\frac{1}{216}=-\frac{5}{36}$．

这表明，获得分数 Y 的期望为负．

因此，多次游戏之后分数减少的可能性更大．

【点评】本题考查了二项分布列、互斥事件与对立事件的概率计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

21．【分析】(I) 建立空间直角坐标系求两直线的方向向量，根据数量积为 0 可证的结论；

(II) 求得直线的方向向量和平面的法向量，证得两向量垂直即可；

(III) 求直线的方向向量平面和法向量的夹角即可．

【解答】(I) 证明：由已知可得，AA_1，AC，AB 两两垂直，

以 A 为坐标原点，AA_1，AC，AB 所在直线建立如图所示的空间直角坐标系，

$\because AB=AA_1=2A_1B_1=2$．

$\therefore A(0，0，0)$，$B(0，2，0)$，$C(2，0，0)$，$A_1(0，0，2)$，$B_1(0，1，2)$，$C_1(1，0，2)$，$M(1，1，0)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1C_1}=(1，0，0)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(0，1，0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0，0，2)$，

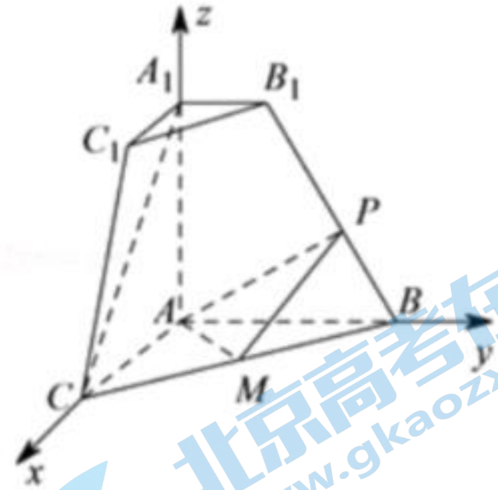
$\therefore \overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=(1，0，0)\cdot=(0，1，0)=0$，$\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=(1，0，0)\cdot(0，0，2)=0$，

$\therefore \overrightarrow{A_1C_1} \perp \overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_1C_1} \perp \overrightarrow{AA_1}$，

即 $A_1C_1 \perp A_1B_1$，$A_1C_1 \perp AA_1$，$AA_1 \bigcap A_1B_1 = A_1$，

$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 A_1B_1BA，又 $\because AP \subset$ 平面 A_1B_1BA，

$\therefore A_1C_1 \perp AP$；



(II) 证明：设 P 点坐标为 $(x，y，z)$，则 $\overrightarrow{BP}=(x，y-2，z)$，$\overrightarrow{PB_1}=(-x，1-y，2-z)$，

$\because \overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PB_1}$，$\therefore x=-2x$，$y-2=2-2y$，$z=4-2z$，

解得 $x=0$，$y=\frac{4}{3}$，$z=\frac{4}{3}$，即 $P(0，\frac{4}{3}，\frac{4}{3})$，

设平面 AMP 的一个法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$，

又 $\overrightarrow{AM}=(1，1，0)$，$\overrightarrow{AP}=(0，\frac{4}{3}，\frac{4}{3})$，

$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x+y=0 \\ \frac{4}{3}y+\frac{4}{3}z=0 \end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，

$\therefore$ 平面 AMP 的一个法向量为 $\vec{n}=(1，-1，1)$，

又 $\overrightarrow{A_1C}=(2，0，-2)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{n}=(2，0，-2)\cdot(1，-1，1)=0$，

$\therefore$ 直线 $A_1C\ //$ 平面 AMP；

(III) 解：设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BB_1}=(0，-\lambda，2\lambda)$，则 $P(0，2-\lambda，2\lambda)$，$\overrightarrow{MP}=(-1，1-\lambda，2\lambda)$，

设平面 A_1CM 的一个法向量为 $\vec{m}=(x，y，z)$，

$\because \overrightarrow{A_1C}=(2，0，-2)$，$\overrightarrow{CM}=(-1，1，0)$，

$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{m}=0 \\ \overrightarrow{CM}\cdot\vec{m}=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2x-2z=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，

$\therefore$ 平面 A_1CM 的一个法向量为 $\vec{m}=(1，1，1)$，

设 MP 与平面 A_1CM 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{MP},\ \vec{m}>|=\dfrac{|\overrightarrow{MP}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{MP}|\times|\vec{m}|}=\dfrac{|-1+1-\lambda+2\lambda|}{\sqrt{1+(1-\lambda)^2+(2\lambda)^2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{45}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 或 $\lambda=-\dfrac{1}{4}$（舍去），

故存在点 P，$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BB_1}$，即点 P 与为距 B 的第一个五等分点．

【点评】本题考查线线垂直的证明，考查线面角的余弦值的求法，考查满足线面平行的证明是否存在的判断与求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题．

22．【分析】(I) 根据离心率和 $|B_1B_2|=2$，通过计算即可求解；

(II) 设直线的方程为 $y=kx+2$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，联立方程求解即可；

(III) 设直线 l 的方程为 $x=m(y-2)$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，联立方程与根据题意求解即可．

【解答】解：(I) 由题意可得 $\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2b=2\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$ 解得 $a^2=2$，$b^2=1$，

可得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．

(II) 由题意得直线 l 过点 $(0,2)$．设直线的方程为 $y=kx+2$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+2\\ x^2+2y=2\end{cases}$，整理得 $(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$，

可得 $x_1+x_2=-\dfrac{8k}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{6}{2k^2+1}$．

因为直线 l 与椭圆由两个交点，所以 $\triangle=(8k)^2-4\times6\times(2k^2+1)>0$，解得 $k^2>\dfrac{3}{2}$，

设 $T(m,n)$，因为 B_1，T，M 在同一条直线上，则 $\dfrac{n-1}{m}=\dfrac{y_1+1}{x_1}=\dfrac{kx_1+3}{x_1}=k+\dfrac{3}{x_1}$，①

又由 B_2，T，M 在同一条直线上，则 $\dfrac{n-1}{m}=\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{kx_2+1}{x_2}=k+\dfrac{1}{x_2}$，②

由①+②×3 可得 $\dfrac{n+1}{m}+3\times\dfrac{n-1}{m}=4k+\dfrac{3(x_1+x_2)}{x_1x_2}=4k+\dfrac{3\times(-\dfrac{8k}{2k^2+1})}{\dfrac{6}{2k^2+1}}=0$，

整理得 $4n-2=0$，解得 $n=\dfrac{1}{2}$．

所以点 T 在直线 $y=\dfrac{1}{2}$，即当直线 l 绕点 P 旋转时，点 T 总在一条定直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上运动．

(III) 由 (2) 知，点 T 在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上运动．即 $y_T=\dfrac{1}{2}$，

设直线 l 的方程为 $x=m(y-2)$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

又由 $B_1(0,-1)$， $B_2(0,1)$，且 $|MT|\cdot|NT|=|B_1T|\cdot|B_2T|$，

可得 $(y_1-\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}-y_2)=(1-\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}+1)$，即 $-y_1y_2+\frac{1}{2}(y_1+y_2)=1$，

联立方程组 $\begin{cases}x=m(y-2)\\x^2+2y=2\end{cases}$，整理得 $(m^2+2)y^2-4m^2y+4m^2-2=0$，

可得 $y_1+y_2=-\frac{4m^2}{m^2+2}$， $y_1y_2=\frac{4m^2-2}{m^2+2}$，

代入可得 $-\frac{4m^2-2}{m^2+2}-\frac{2m^2}{m^2+2}=1$，解得 $m=0$，

此时直线的斜率不存在，不合题意，

所以不存在直线 l，使得 $|MT|\cdot|NT|=|B_1T|\cdot|B_2T|$ 成立.

【点评】本题考查椭圆方程的求法，直线与椭圆的位置关系的综合应用，考查转化思想以及计算能力，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。