2022 北京一零一中高一（上）期中

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．设集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x\,|\,(x-2)(x-5)\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

（A）$\{1,3\}$　　（B）$\{1,3\}$　　（C）$\{5,7\}$　　（D）$\{1,7\}$

2．若实数 a,b 满足 $a>b>0$，则下列不等式中恒成立的是（　　）

（A）$a+b>2\sqrt{ab}$　　（B）$a+b<2\sqrt{ab}$

（C）$\dfrac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$　　（D）$\dfrac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

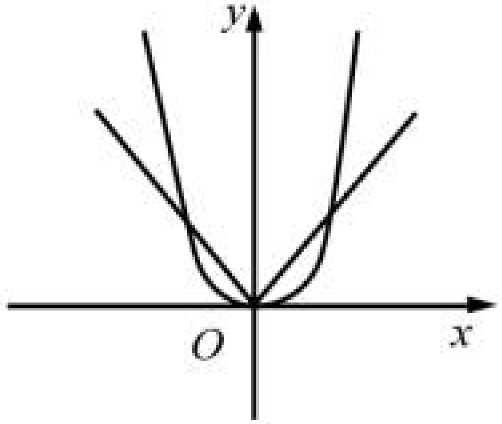
3．已知关于 x 的方程 $x^2-6x+k=0$ 的两根分别是 x_1，x_2，且满足 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=3$，则 k 的值是（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

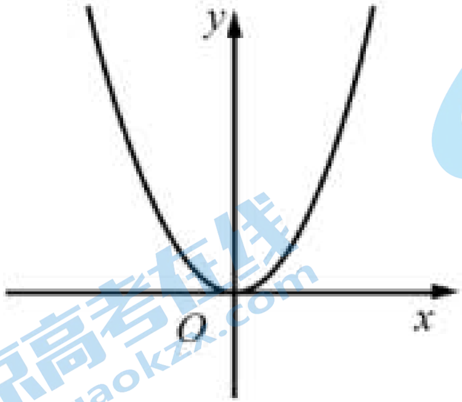
4．函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x},x\in[1,3]$ 的值域为（　　）

（A）$[2\sqrt{2},3]$　　（B）$\left[3,\dfrac{11}{3}\right]$　　（C）$\left[2\sqrt{2},\dfrac{11}{3}\right]$　　（D）$[3,+\infty)$

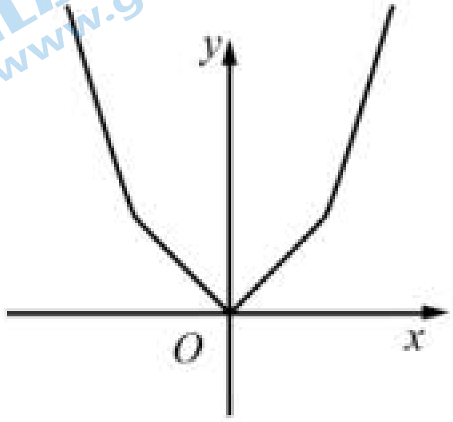
5．已知 $f(x)=|x|, g(x)=x^2$，设 $h(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)>g(x), \\ g(x), & f(x)\leqslant g(x), \end{cases}$ 以则函数 $h(x)$ 的图象大致是（　　）



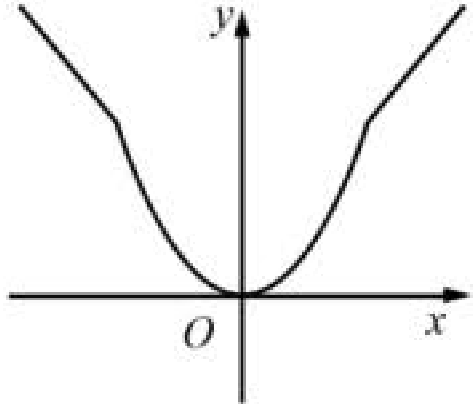
（A）



（B）



（C）



（D）

6．已知 $p: x\geqslant k, q: \dfrac{2-x}{x+1}<0$，如果 p 是 q 的充分不必要条件，则 k 的取值范围是（　　）

（A）$[2,\infty)$　　（B）$(2,+\infty)$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-1]$

7．已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为（　　）

（A）$(-1,0)\cup(0,1)$　　（B）$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

（C）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

8．已知函数 $f(x)=mx^2-mx-1$，对 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)<0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$(-4,0)$　　（B）$(-4,0]$

（C）$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-4)\cup[0,+\infty)$

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-7, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{a}{x}, & x>1\end{cases}$，在 **R** 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[-4,0)$　　（B）$(-\infty,-2]$　　（C）$[-4,-2]$　　（D）$(-\infty,0)$

10．设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，若存在两个不等实数 $x_1,x_2\in \boldsymbol{R}$，使得 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

则称函数 $f(x)$ 在 **R** 上具有性质 P，那么，下列函数：

①$f(x)=2x$；　②$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；　③$f(x)=x^2$；　④$f(x)=\left|x^2-1\right|$

具有性质 P 的函数的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数 $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ 的定义域为__________.

12．若 $-2<a<3$,$1<b<2$，则 $a-2b$ 的取值范围是__________.

13．我国南北朝数学家何承天发明的“调日法”，是程序化寻求精确分数来表示数值的算法．其理论依据是：设实数 x 的不足近似值和过剩近似值分别为 $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{d}{c}$（其中 a,b,c,d 都是正整数，即 $\frac{b}{a}<x<\frac{d}{c}$，则 $\frac{b+d}{a+c}$ 是 x 的更精确的不足近似值或过剩近似值，已知 $\pi=3,14159\cdots$，令 $\frac{31}{10}<\pi<\frac{49}{15}$，则第一次用"“调日法”后得 $\frac{16}{5}$ 是 π 的更为精确的过剩近似值，即 $\frac{31}{10}<\pi<\frac{16}{5}$，若每次都取最简分数，则第三次用“调日法"后，$\pi$ 的更为精确的过剩近似值是__________.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & x\geqslant 0\\ 3x+4, & x<0\end{cases}$ 若互不相等的实数 x_1,x_2,x_3，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是__________.

15．华人数学家李天岩和美因数学家约克给出了“混沌的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用．在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的函数，对于而 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$

若存在正整数 k 使得 $x_k=x_0$，且当 $0<j<k$ 时，$x_j\neq x_0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为的周期点给出下列四个结论：

①若 $f(x)=2x-1$，则 $f(x)$ 存在唯一一个周期为 1 的周期点；

②若 $f(x)=2(1-x)$，则 $f(x)$ 存在周期为 2 的周期点；

③若 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x), & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $f(x)$ 存在周期为 3 的周期点；

④若 $f(x)=x(1-x)$ 以，则对任意正整数 n，$\dfrac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 道大题，共 55 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，

16.（本小题 8 分）

已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|2x-1\leqslant 1\}$，集合 $B=(x\in\mathbf{R}|-1<x\leqslant 2\}$.

（1）求集合 $A\cap B$ 及 $C_U(A\cup B)$；

（2）若集合 $C=\{x\in\mathbf{R}|\ a\leqslant x<2a, a>0\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围。

217.（本小题 8 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

（1）判断 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的单调性，并用单调性定义证明；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[-4,-2]$ 上的最大值和最小值.

18.（本小题 8 分）

若二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)-f(x)=2x$，且 $f(0)=2$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若在区间 $[-1,1]$ 上，不等式 $f(x)>2x+m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19.（本小题 10 分）

设 $a\in \boldsymbol{R}$，解关于 x 的不等式 $ax^2+(1-2a)x-2>0$.

20.（本小题 10 分）

经检测，餐后 4 小时内，正常人身体内某微量元素在血液中的浓度 y_1 与时间 t 满足关系式：$y_1=4-t(0\le 1\le 4)$，服用药物 N 后，药物中所含该微量元素在血液中的浓度 y_2 与时 t，间 t 满足关系式：$y_2=\begin{cases}\sqrt{t}, & 0\leqslant t<1\\ 3-\dfrac{2}{t}, & 1\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$，现假定某患者餐后立刻服用药物 N，且血液中微量元素总浓度 y 等于为 y_1 与 y_2 的和.

（1）求 4 小时内血液中微量元素总浓度 y 的最高值；

（2）若餐后 4 小时内，血液中微量元素总浓度 y 不低于 4 的累积时长不少于 2.5 小时，则认定该药物治疗有效，否则调整治疗方案。请你判断是否需要调整治疗方案.

21.（本小题 11 分）

按照一定次序排列的一列数称为数列．设数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n,B:b_1,b_2,\cdots,b_n$ ，已知

$a_i,b_j\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，定义 $n\times n$ 数表 $X(A,B)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

其中列 $x_{ij}=\begin{cases}1, & a_i=b_j \\ 0, & a_i\neq b_j\end{cases}$

（1）若 A:1,0,1, B:0,0,1，写出 $X\left(A,B\right)$；

（2）若 A,B 是不同的数列，求证：$n\times n$ 数表 $X\left(A,B\right)$ 满足

“$x_{ij}=x_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$” 的充分必要条件为 “$a_k+b_k=1(k=1,2,\cdots,n)$”；

（3）若数列 A 与 B 中的 1 共有 n 个，求证 $n\times n$ 数表 $X\left(A,B\right)$ 中 1 的个数不大于号 $\dfrac{n^2}{2}$.

北京一零一中 2022-2023 学年度第一学期期中考试高一数学参考答案

1. B

2. (2022 高考上海 14) A

3. B

4. C

5. C

6. B

7. A

8. B

9. C

10. (2020 石景山一模 (改编) 9) D

11. $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

12. $(-6, 1)$.

13. (2019 怀柔一模理 (改编) 14) $\dfrac{63}{20}$.

14. $(1, \frac{4}{3}]$.

15. (2021 朝阳一模 (改编) 15) ①③④.

对于①, 由 $2x_0 - 1 = x_0$ 得此方程有唯一解 $x_0 = 1$, 所以则 $f(x)$ 存在唯一一个周期为 1 的周期点.

对于②, 由 $2\{1 - [2(1 - x_0)]\} = x_0$ 得 $x_0 = \frac{2}{3}$, 但此时 $2(1 - x_0) = \frac{2}{3}$, 不符合 "当 $0 < j < k$ 时, $x_j \neq x_0$".

对于③, $f(x) = 2x$ 是单调函数, 不会出现周期点; 考虑如下迭代: $x_0 \to 2x_0 \to 4x_0 \to 2(1 - 4x_0)$, 由 $2(1 - 4x_0) = x_0$ 得 $x_0 = \frac{2}{9}$, 是周期为 3 的周期点.

对于④, $f(x) = x(1 - x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上是增函数, 且 $f(x_0) = \frac{1}{4}$, 所以 $x_0 > f(x_0)$, 所以 $f(x_0) > f(f(x_0)) = f(x_1), \cdots, f(x_{n-1}) > f(x_n)$, 从而不存在正整数 k 使得 $x_k = x_0$, 所以 $\frac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点.

16. (2022 朝阳高一上期末 (改编) 17)

(1) 由 $2x-1 \leqslant 1$ 得 $x \leqslant 1$, 所以 $A=(-\infty,1]$, $\complement_U A=(1,+\infty)$.

由 $B=(-1,2]$, 所以 $A \cap B=(-1,1]$.

因为 $A \cup B=(-\infty,2]$, 所以 $\complement_U(A \cup B)=(2,+\infty)$.

(2) 因为 $C \subseteq B$, 且 $a>0$,

所以 $2a \leqslant 2$, 解得 $a \leqslant 1$.

所以 a 的取值范围是 $(0,1]$.

17. (1) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 证明如下:

任取 $x_1,x_2 \in (1,+\infty)$, 且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2-1}-\dfrac{1}{x_2^2-1}=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}=\dfrac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$.

因为 $x_1<x_2$, 所以 $x_2-x_1>0$.

又 $x_1,x_2 \in (1,+\infty)$,

所以 $x_2+x_1>0$, $x_1^2-1>0$, $x_2^2-1>0$.

所以 $\dfrac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}>0$, 即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

(2) 因为 $f(x)$ 为偶函数且在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $f(x)$ 在 $[-4,-2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 最小值为 $f(-4)=\dfrac{1}{15}$, 最大值为 $f(-2)=\dfrac{1}{3}$.

18. (1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$,

因为 $f(0)=2$, 所以 $c=2$, 所以 $f(x)=ax^2+bx+2$.

因为 $f(x+1)-f(x)=2x$, 所以 $2ax+a+b=2x$,

所以 $\begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$

所以 $f(x)=x^2-x+2$.

(2) 由题意知 $x^2-x+2>2x+m$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立,

即 $x^2-3x+2-m>0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立.

令 $g(x)=x^2-3x+2-m=(x-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{1}{4}-m\ (x\in[-1,1])$,

则 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是减函数,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=1-3+2-m>0$, 所以 $m<0$,

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0)$.

19. (1) 当 $a=0$ 时, 不等式可化为 $x-2>0$, 解得 $x>2$, 即原不等式的解集为 $\{x\mid x>2\}$.

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2+(1-2a)x-2=0$ 的两根分别为 2 和 $-\frac{1}{a}$.

①当 $a<-\frac{1}{2}$ 时, 解不等式得 $-\frac{1}{a}<x<2$, 即原不等式的解集为 $\{x \mid -\frac{1}{a}<x<2\}$;

②当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 不等式无解, 即原不等式的解集为 $\varnothing$;

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时, 解不等式得 $2<x<-\frac{1}{a}$, 即原不等式的解集为 $\{x \mid 2<x<-\frac{1}{a}\}$;

④当 $a>0$ 时, 解不等式得 $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>2$, 即原不等式的解集为 $\{x \mid x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>2\}$.

20. (1) 由题微量元素在血液内的总浓度 y 与时间 t 的关系为:

$$y=y_1+y_2=\begin{cases}-t+\sqrt{t}+4, & 0 \leqslant t<1, \\ 7-(t+\frac{2}{t}), & 1 \leqslant t \leqslant 4.\end{cases}$$

当 $0 \leqslant t<1$ 时, $y=-t+\sqrt{t}+4=-(\sqrt{t}-\frac{1}{2})^2+\frac{17}{4}$,

则 $t=\frac{1}{4}$ 取得最大值 $\frac{17}{4}$. 当 $1 \leqslant t \leqslant 4$ 时, 因为 $t+\frac{2}{t} \geqslant 2\sqrt{2}$,

所以 $y_{\max}=7-2\sqrt{2}$ (当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时取到等号),

当 $t=\sqrt{2}$ 是取得最大值 $7-2\sqrt{2}$.

因为 $\frac{17}{4}>7-2\sqrt{2}$, 故微量元素总浓度最大值为 $\frac{17}{4}$.

(2) 当 $0 \leqslant t<1$ 时, $-t+\sqrt{t}+4 \geqslant 4$, 解得 $0 \leqslant t<1$;

当 $1 \leqslant t \leqslant 4$ 时, $7-(t+\frac{2}{t}) \geqslant 4$, 解得 $1 \leqslant t \leqslant 2$.

注射药物 N 后血液中微量元素总浓度不低于 4 的累积时长仅为 2 小时, 所以需要调整治疗方案.

21. (2020 东城二模 (改编) 21)

(1) $X(A,B)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 先证充分性:

若 $a_k+b_k=1\ (k=1,2,\cdots,n)$, 由于 $x_{ij}=\begin{cases} 1, & a_i=b_j, \\ 0, & a_i\neq b_j, \end{cases}$ $x_{ji}=\begin{cases} 1, & a_j=b_i, \\ 0, & a_j\neq b_i. \end{cases}$

令 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$, 由此数列 $B:1-a_1,1-a_2,\cdots,1-a_n$.

由于 $a_i=b_j\Leftrightarrow a_i=1-a_j\Leftrightarrow a_i+a_j=1\Leftrightarrow a_j=1-a_i\Leftrightarrow a_j=b_i$.

从而有 $x_{ij}=x_{ji}\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$.

再证必要性: 若 $x_{ij}=x_{ji}\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$.

由于 A,B 是不同的数列,

①设 $a_1=1,b_1=0$, 对任意的正整数 $k>1$,

(A) 若 $x_{1k} = x_{k1} = 1$, 可得 $a_1 = b_k = 1, a_k = b_1 = 0$,

所以 $a_k + b_k = 1$.

(B) 若 $x_{1k} = x_{k1} = 0$, 可得 $b_k = 0, a_k = 1$,

所以 $a_k + b_k = 1$.

同理可证 $a_1 = 0, b_1 = 1$ 时, 有 $a_k + b_k = 1\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 成立.

②设 $a_1 = 1, b_1 = 1$, 对任意的正整数 $k > 1$,

(A) 若 $x_{1k} = x_{k1} = 1$, 可得 $a_1 = b_k = 1, a_k = b_1 = 1$,

所以有 $a_k = b_k = 1$, 则 A, B 是相同的数列, 不符合要求.

(B) 若 $x_{1k} = x_{k1} = 0$, 可得 $b_k = 0, a_k = 0$,

所以有 $a_k = b_k$, 则 A, B 是相同的数列, 不符合要求.

同理可证 $a_1 = 0, b_1 = 0$ 时, A, B 是相同的数列, 不符合要求.

综上, 有 $n \times n$ 数表 $X(A, B)$ 满足 "$x_{ij} = x_{ji}$" 的充分必要条件为 "$a_k + b_k = 1\ (k = 1, 2, \cdots, n)$".

(3) 由于数列 A, B 中的 1 共有 n 个, 设 A 中 1 的个数为 p,

由此有, A 中 0 的个数为 $n - p$, B 中 1 的个数为 $n - p$, B 中 0 的个数为 p.

若 $a_i = 1$, 则数表 $X(A, B)$ 的第 i 行为数列 $B: b_1, b_2, \cdots, b_n$,

若 $a_i = 0$, 则数表 $X(A, B)$ 的第 i 行为数列 $B: 1 - b_1, 1 - b_2, \cdots, 1 - b_n$,

所以数表 $X(A, B)$ 中 1 的个数为 $p(n - p) + (n - p)p = 2p(n - p) \leqslant 2\left(\frac{p + (n - p)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$.

所以 $n \times n$ 数表 $X(A, B)$ 中 1 的个数不大于 $\frac{n^2}{2}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。