20230607 项目第三次模拟测试卷

文科数学 参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	D	B	A	B	B	D	A	C	C

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分，满分 20 分.

13．1　　14．$\frac{1}{4}$　　15．$\frac{1}{2}$　　16．$2^{12}-24$

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．【解析】(1) 在 ΔAPC 中，因为 $AP\perp CP$，且 $AP=PC$，所以 $\angle CAP=\frac{\pi}{4}$，

由 $AC=2$，可得 $AP=\sqrt{2}$，又 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，则 $\angle BAP=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$，………………　2 分

在 ΔAPB 中，因为 $\angle APB=\frac{2\pi}{3},\angle BAP=\frac{\pi}{12}$，所以 $\angle ABP=\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，

在 ΔAPB 中，由正弦定理 $\frac{AB}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，解得 $AB=\sqrt{3}$，………………　4 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$.　………………　6 分

(2) 在 ΔABC 中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

即 $7=AB^2+4-2\cdot AB\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，亦即 $AB^2-2AB-3=0$，解得 $AB=3$（$AB=-1$ 舍去），

令 $\angle CAP=\alpha$（$\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$），则在 ΔAPC 中，$AP=2\cos\alpha$，

在 ΔAPB 中，$\angle BAP=\frac{\pi}{3}-\alpha$，所以 $\angle ABP=\pi-\frac{2\pi}{3}-(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\alpha$，………………　9 分

在 ΔAPB 中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{AP}{\sin\angle ABP}$，$\frac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$，解得 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，则 $AP=2\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.　………………　12 分

18．【解析】(1) 延长 DC 交 AB 于点 M，则 $BM=AB=2$，
且 $AGEB$ 为平行四边形，所以 $EG\,/\!/\,BM$，
所以 $BMEG$ 为平行四边形，故 $BG\,/\!/\,EM$，
所以 $BG\,/\!/$ 平面 DCE.　………………………………………　5 分

(2) 取 AD 的中点 N，则 $NC\,/\!/\,AB\,/\!/\,GE$，且 $NC=GE=2$，
所以 $NCEG$ 为平行四边形，则 $CE\,/\!/\,NG$，

在平面 $ABEF$ 内，过 G 作 FB 的平行线交 AB 于 P，则 $\angle NGP=60^\circ$，

设 $AP=x$，则 ΔNGP 中，$NG=\sqrt{AG^2+AN^2}=\sqrt{2}$，$NP=\sqrt{AP^2+AN^2}=\sqrt{x^2+1}$，

$PG=\sqrt{AG^2+AP^2}=\sqrt{x^2+1}$，$\angle NGP=60^\circ$，

则 ΔNGP 为等边三角形，故 $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2}$，即 $x=1$， ………………… 9 分

所以在 ΔAFB 中，P 为 AB 的中点，且 $GP\parallel FB$，故 GP 为 ΔAFB 的中位线，

所以 $AF=2AG=2$，

所以多面体 $ABCDEF$ 为棱台，

体积 $V=V_{M-AFD}-V_{M-BEC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AF\times AD\times MA-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}BE\times BC\times MB=\dfrac{7}{3}$. ………… 12 分

19. 【解析】（1）由样本数据得 (x_i,i)（$i=1,2,\cdots,16$）的相关系数，

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})(i-8.5)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}}\approx\frac{-2.78}{0.212\times18.439\times4}\approx-0.18,$$

因为 $|r|=0.18<0.25$，所以可以认为年薪与工龄不具有线性相关关系； ………………… 5 分

（2）由于 $\overline{x}=9.97$，$s\approx0.212$，由样本数据可以看出工龄为 13 年的员工年薪在 $(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s)=(9.334,10.606)$ 之外，因此会被约谈并进行岗位调整，所以留下 15 名员工，剩下员工年薪的均值为 $\dfrac{1}{15}\times(16\times9.97-9.22)=10.02$ 万元，

$\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2=16\times s^2+16\overline{x}^2=16\times0.212^2+16\times9.97^2\approx16\times99.446=1591.136$，

余下员工年薪的方差为 $\dfrac{1}{15}\times(1591.136-9.92^2-15\times10.02^2)\approx0.008$，

所以标准差的估计值为 $\sqrt{0.008}\approx0.09$. ………………………………………… 12 分

20. 【解析】（1）依题意，$x>-2$，$a>0$，且 $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x+2}$，

由 $f'(2023)=ae^{2023}-\dfrac{1}{2025}=0$，得 $a=\dfrac{1}{2025e^{2023}}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2025e^{2023}}e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $-2<x<2023$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2023$ 时，则 $f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(-2,2023)$ 上单调递减，在 $(2023,+\infty)$ 上单调递增； ………………… 5 分

（2）令 $ae^x-\ln(x+2)+\ln a-2=0$，即 $e^{x+\ln a}+(x+\ln a)=\ln(x+2)+(x+2)$，

所以 $e^{x+\ln a}+(x+\ln a)=e^{\ln(x+2)}+\ln(x+2)$，令 $g(x)=e^x+x$，

由 $g(x)$ 在 R 上单调递增可得 $x+\ln a=\ln(x+2)$，即 $\ln a=\ln(x+2)-x$，

要使函数 $f(x)$ 有两个零点，只需方程 $\ln a=\ln(x+2)-x$ 有两根，

令 $F(x)=\ln(x+2)-x$，$x>-2$，则 $F'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=-\dfrac{x+1}{x+2}$，

则当$-2<x<-1$时，$F'(x)>0$，当$x>-1$时，则$F'(x)<0$，

即$F(x)$在$(-2,-1)$上单调递增，在$(-1,+\infty)$上单调递减；

所以$F(x)\le F(-1)=1$，当$x\to -2$时，$F(x)\to -\infty$，当$x\to +\infty$时，$F(x)\to -\infty$，

所以当$\ln a<1$，即$0<a<\mathrm{e}$时，方程$\ln a=\ln(x+2)-x$有两根，

从而当$a\in(0,\mathrm{e})$时，函数$f(x)$有两个零点. ………………………………… 12 分

21. 【解析】（1）以线段EF所在的直线为x轴，线段EF的中垂线所在的直线为y轴建立如图所示的直角坐标系，设点P为折痕上一点，

由题意可知，$|EF|=2\sqrt{3}$，

$|PF|+|PE|=|PA|+|PE|=|AE|=4>|EF|$，

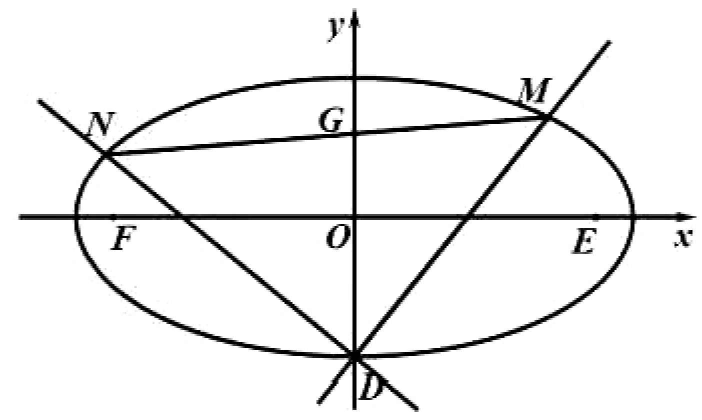
所以点P在以E、F为焦点的椭圆是上，

且$c=\sqrt{3}$，$a=2$，则$b=1$，

所以椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$； ……………………………… 5 分

（2）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线MN与y的焦点设为点G，由题意知$D(0,-1)$，

则$l_1:y=kx-1,l_2:y=-\dfrac{1}{k}x-1$，



联立方程$\begin{cases}y=kx-1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，整理得$(4k^2+1)x^2-8kx=0$，

则$x_1=\dfrac{8k}{4k^2+1}$，$y_1=kx_1-1=k\cdot\dfrac{8k}{4k^2+1}-1=\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}$，即$M(\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1})$，

同理可得$N\left(\dfrac{8(-\frac{1}{k})}{4(-\frac{1}{k})^2+1},\dfrac{4(-\frac{1}{k})^2-1}{4(-\frac{1}{k})^2+1}\right)$，即$N(\dfrac{-8k}{4+k^2},\dfrac{4-k^2}{4+k^2})$，

所以$k_{MN}=\dfrac{\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}-\dfrac{4-k^2}{4+k^2}}{\dfrac{8k}{4k^2+1}-\dfrac{-8k}{4+k^2}}=\dfrac{k^2-1}{5k}$，

故直线MN的方程为$y-\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}=\dfrac{k^2-1}{5k}(x-\dfrac{8k}{4k^2+1})$，

令$x=0$，解得$y_G=\dfrac{k^2-1}{5k}\cdot(-\dfrac{8k}{4k^2+1})+\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}=\dfrac{3}{5}$，即$G(0,\dfrac{3}{5})$,则

$S=\dfrac{1}{2}\cdot|DG|\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\left|\dfrac{8k}{4k^2+1}-\dfrac{-8k}{4+k^2}\right|=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{8|k|\cdot(5k^2+5)}{(4k^2+1)(4+k^2)}=\dfrac{32|k|\cdot(k^2+1)}{(4k^2+1)(4+k^2)}$，

$\dfrac{S}{|k|}=\dfrac{32(k^2+1)}{(4k^2+1)(4+k^2)}>\dfrac{16}{9}$，即$4k^4-k^2-14<0$，解得$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，

所以k的取值范围为$k\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$. ………………………………… 12 分

22. 【解析】（1）因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=4-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=4+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），

所以直线 l 的普通方程为 $x+y-8=0$，……………………………… 2 分

又曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$，即 $\rho^2=8\rho\sin\theta$，

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=8y$，即 $x^2+(y-4)^2=16$，

又因为点 A 在曲线 C 上，且圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|4-8|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

所以点 A 到直线 l 距离的最大值为 $2\sqrt{2}+4$. ……………………………… 5 分

（2）联立直线 l 与曲线 C 的方程 $\begin{cases} x+y-8=0 \\ x^2+y^2=8y \end{cases}$，得 $x^2-4x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=4$，

因为点 B 在第一象限，所以 $B(4,4)$，则点 B 的极坐标为 $(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，

因为 $\angle AOB=\frac{7\pi}{12}$，则可设点 A 的极坐标为 $(\rho,\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12})$，……………………………… 7 分

又因为点 A 在曲线 C 上，所以 $|OA|=\rho=8\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12})=8\sin\frac{5\pi}{6}=4$，

所以 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}\times\sin\frac{7\pi}{12}$

$=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=4+4\sqrt{3}$. ……………………………… 10 分

23. （10 分）选修 4-5：不等式选讲

【解析】（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-2|+|x+4|$，

当 $x\le-4$ 时，$f(x)=2-x-x-4=-2x-2\ge7$，解得 $x\le-\frac{9}{2}$，即 $x\le-\frac{9}{2}$；

当 $-4<x<2$ 时，$f(x)=2-x+x+4=6\ge7$，无解；

当 $x\ge2$ 时，$f(x)=x-2+x+4=2x+2\ge7$，解得 $x\ge\frac{5}{2}$，；

综上：$x\in(-\infty,-\frac{9}{2}]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$；……………………………… 5 分

（2）由题意知 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，

因为 $f(x)=|x-a|+|x+3a-2|\ge|x-a-x-3a+2|=|4a-2|$，即 $f(x)_{\min}=|4a-2|$，

又 $g(x)=-x^2+2ax+1=-(x-a)^2+a^2+1\le a^2+1$，即 $g(x)_{\max}=a^2+1$，

所以 $|4a-2|>a^2+1$，即 $4a-2>a^2+1$ 或 $2-4a>a^2+1$，

解得 $1<a<3$ 或 $-2-\sqrt{5}<a<-2+\sqrt{5}$. ……………………………… 10 分