2023北京一七一中高三（上）开学考

数学

（考试时间：120分钟　　总分：150分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 若集合$A=\{-2,0,1\}$，$B=\{x|x<-1\text{ 或}x>0\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{-2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0,1\}$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据集合的交集运算即可求解.

【详解】因为$A=\{-2,0,1\}$，$B=\{x\,|\,x<-1\text{或}x>0\}$，

所以$A\cap B=\{-2,1\}$，

故选：C

2. 已知$a=0.3^{1.5},b=\log_{1.5}0.3,c=1.5^{0.3}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

【答案】B

【解析】

【分析】根据指对数的性质，分别求三个数的范围，再比较大小.

【详解】由条件可知，$a=0.3^{1.5}\in(0,1)$，$b=\log_{1.5}0.3<0$，$1.5^{0.3}>1$，

所以$b<a<c$.

故选：B

3. 在复平面内，复数z所对应的点的坐标为$(1,-1)$，则$z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. 2　　B. $-2i$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2i$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据复数的几何意义求出复数z，再求出复数z的共轭复数，最后根据复数的乘法法则计算可得；

【详解】解：因为在复平面内，复数z所对应的点的坐标为$(1,-1)$，

所以$z=1-i$，所以$\overline{z}=1+i$

所以$z\cdot\overline{z}=(1-i)(1+i)=1-i^2=2$

故选：A

4. 二项式$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式的第二项是

A. $6x^4$　　B. $-6x^4$　　C. $12x^4$　　D. $-12x^4$

【答案】D

【解析】

【详解】展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r(x)^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r$，

令$r=1$,可得展开式的第二项为$C_6^1x^5\left(-\dfrac{2}{x}\right)^1=-12x^4$.选 D

5. 设$0<a<b$，则下列不等式中正确的是

A. $a<b<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$　　B. $a<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\dfrac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<a<\dfrac{a+b}{2}<b$

【答案】B

【解析】

【分析】利用基本不等式和不等式的传递性即可选出答案.

【详解】$\because 0<a<b$，由基本不等式得$\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$，$\therefore a=\sqrt{a^2}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\dfrac{b+b}{2}=b$

故选：B.

6. 将函数$y=\sin(2x-\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象沿$x$轴向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位后得到的图象关于原点对称，则$\varphi$的值为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】求出平移后的函数解析式，根据已知条件可得出关于φ的等式，结合φ的取值范围可求得φ的值.

【详解】将函数 $y=\sin\left(2x-\varphi\right)\left(0<\varphi<\pi\right)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的图象对应的函数解析式为 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$，

由题意可知，函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$ 为奇函数，则 $\frac{\pi}{3}-\varphi=k\pi\left(k\in Z\right)$，

所以，$\varphi=\frac{\pi}{3}-k\pi\left(k\in Z\right)$，$\because 0<\varphi<\pi$，因此，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

故选：B.

7. “$m=5$”是“双曲线 C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 的虚轴长为 2”的（　　）

A. 充分但不必要条件　　　　B. 必要但不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据双曲线 C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 的虚轴长为 2 求出对应的 m 值即可判断.

【详解】若双曲线 C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 的虚轴长为 2，

则当 $m>0$ 且 $4-m<0$ 时，即 $m>4$ 时，$2\sqrt{m-4}=2$，解得 $m=5$，

当 $m<0$ 且 $4-m>0$ 时，即 $m<0$ 时，$2\sqrt{-m}=2$，解得 $m=-1$，

所以“双曲线 C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 的虚轴长为 2”对应的 m 值为 $m=5$ 或 $m=-1$，

故“$m=5$”是“双曲线 C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 的虚轴长为 2”的充分但不必要条件.

故选：A.

8. 函数 $f(x)=x|x|$. 若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x-2k)-k<0$，则 k 的取值范围是（　　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】通过分类讨论 $x-2k\ge 0$ 和 $x-2k<0$，将 $f(x-2k)-k<0$ 转化成具体的不等式，再转化为最值问题，根据单调性求出最值，可得 k 的取值范围.

【详解】当 $k\le\frac{1}{2}$ 时，$x-2k\ge 0$，$\therefore f(x-2k)-k<0$，可化为 $(x-2k)^2-k<0$，

即存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $g(x)=x^2-4kx+4k^2-k<0$ 成立，

$\because g(x)=x^2-4kx+4k^2-k$ 的对称轴为 $x=2k\le 1$，

$\therefore g(x)=x^2-4kx+4k^2-k$ 在区间 $[1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 只要 $g(1)<0$，即 $1-4k+4k^2-k<0$，解得：$\frac{1}{4}<k<1$，

又 $\because k\le\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{1}{4}<k\le\frac{1}{2}$，

当 $k>\frac{1}{2}$ 时，$f(x-2k)-k<0$ 可化为 $-(x-2k)^2-k<0$，此时不等式恒成立，

综上所述，$k>\frac{1}{4}$.

故选：D

【点睛】本题考查了不等式有解问题，通过分类讨论转化成最值问题，使问题得到了解决，分类讨论是高中数学经常用到的解题方法，属于中档题.

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-9$，$a_5=-1$ 记 $T_n=a_1a_3a_5\ldots a_{2n-1}$（$n=1$，2，…）.则数列 $\{T_n\}$（　　）

A. 有最大项，有最小项　　B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项　　D. 无最大项，无最小项

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意易求得等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q，设数列 $\{b_n\}$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的奇数项 $a_1,a_3,a_5,\ldots,a_{2n-1}$（$n=1$，2，…），则数列 $\{b_n\}$ 是以 a_1 为首项，q^2 为公比的等比数列，再分奇偶讨论数列 $\{T_n\}$ 的项，即可得出结论.

【详解】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

则 $\frac{a_5}{a_1}=q^4=\frac{1}{9}$，所以 $q^2=\frac{1}{3}$，

设数列 $\{b_n\}$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的奇数项 $a_1,a_3,a_5,\ldots,a_{2n-1}$（$n=1$，2，…），

则数列$\{b_n\}$是以-9为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，

则$b_n=-9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$，

所以$T_n=a_1a_3a_5\ldots a_{2n-1}=b_1b_2b_3\cdots b_n$，

当$n\geq 4$时，$|b_n|<1$，当$1\leq n\leq 3$时，$|b_n|\geq 1$，

当n为奇数时，$T_n<0$，因为$b_3=-1$，

所以$T_n\geq T_3=-27$，

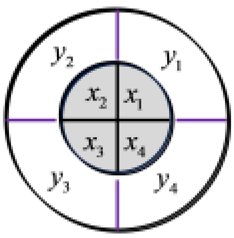
当n为偶数时，$T_n>0$，因为$b_3=-1$，

所以$T_n\leq T_2=27$，

综上所述，数列$\{T_n\}$有最大项$T_2=27$和最小项$T_3=-27$.

故选：A.

10. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起（有一轴穿过它们的圆心），两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域，小圆盘上所写的实数分别记为x_1,x_2,x_3,x_4，大圆盘上所写的实数分别记为y_1,y_2,y_3,y_4，如图所示. 将小圆盘逆时针旋转$i(i=1,2,3,4)$次，每次转动90°，记$T_i(i=1,2,3,4)$为转动i次后各区域内两数乘积之和，例如$T_1=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1$. 若$x_1+x_2+x_3+x_4<0$，$y_1+y_2+y_3+y_4<0$，则以下结论正确的是



A. T_1,T_2,T_3,T_4中至少有一个为正数　　B. T_1,T_2,T_3,T_4中至少有一个为负数

C. T_1,T_2,T_3,T_4中至多有一个为正数　　D. T_1,T_2,T_3,T_4中至多有一个为负数

【答案】A

【解析】

【详解】根据题意可知：

（$x_1+x_2+x_3+x_4$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）>0,

又（$x_1+x_2+x_3+x_4$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）

去掉括号即得：

$$x_1y_2+x_2y_2+x_1y_3+x_1y_4+x_2y_2+x_2y_2+x_2y_3+x_2y_4+x_3y_2+x_3y_2+x_3y_3+x_3y_4$$

$$+x_4y_2+x_4y_2+x_4y_3+x_4y_4=T_1+T_2+T_3+T_4>0,$$

所以可知 T_1,T_2,T_3,T_4 中至少有一个为正数，故选 A

点睛：借此题关键是要根据题意明白 T_1,T_2,T_3,T_4 所表达的意思，然后容易发现

（$x_1+x_2+x_3+x_4$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）$=T_1+T_2+T_3+T_4>0$ 从而得出结论

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域为________.

【答案】$(0,1]$

【解析】

【分析】根据开偶次方被开方数非负数，结合对数函数的定义域得到不等式组，解出即可.

【详解】函数 $f(x)=\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域满足：

$\begin{cases}x>0\\1-x\geq 0\end{cases}$ 解得 $0<x\leq 1$

所以函数 $f(x)=\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $(0,1]$

故答案为：$(0,1]$

【点睛】本题考查了求函数的定义域问题，考查对数函数的性质，属于基础题..

12. 在△ABC中，$A=2B$，$2a=3b$，则 $\cos B=$_______.

【答案】$\frac{3}{4}$ ##0.75

【解析】

【分析】利用题意可得 $\sin A=\sin 2B,\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，再利用正弦定理即可得到答案

【详解】解：因为 $A=2B$，$2a=3b$，

所以 $\sin A=\sin 2B,\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，

所以由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=\frac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B=\frac{3}{2}$，

所以 $\cos B=\frac{3}{4}$，

故答案为：$\dfrac{3}{4}$

13. 已知过定点 $P(2,0)$ 的直线 l 与曲线 $y=\sqrt{2-x^2}$ 相交于 A， B 两点. O 为坐标原点.当 ΔAOB 的面积最大时，直线 l 的倾斜角为______.

【答案】$\dfrac{5\pi}{6}$

【解析】

【分析】

曲线 $y=\sqrt{2-x^2}$ 为以原点为圆 $x^2+y^2=2$ 的上半圆,由题意和三角形的面积公式可得当 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\triangle AOB$ 的面积取到最大值,O 到直线 l 的距离 $OD=1$,在直角三角形中由三角函数定义和倾斜角的定义可得.

【详解】画出图像由题意可得$\triangle AOB$ 的面积

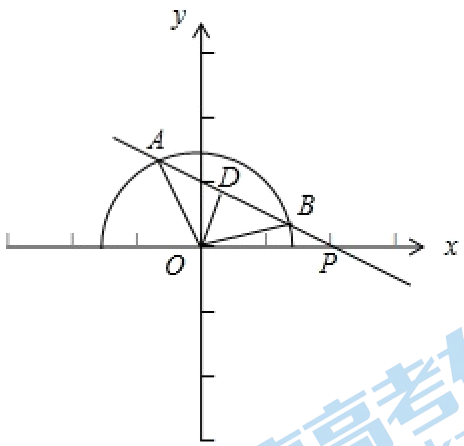
$S=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cdot\sin\angle AOB=\sin\angle AOB$ ，

当 $\sin\angle AOB=1$ 即 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\triangle AOB$ 的面积取到最大值,

此时在 $Rt\triangle AOB$ 中易得 O 到直线 l 的距离 $OD=1$,

在 $Rt\triangle POD$ 中,易得 $\sin\angle OPD=\dfrac{OD}{OP}=\dfrac{1}{2}$,可得 $\angle OPD=\dfrac{\pi}{6}$,

所以直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{5\pi}{6}$.



故答案为：$\dfrac{5\pi}{6}$

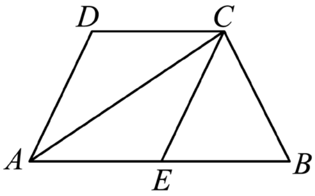
【点睛】本题主要考查了直线与圆相交的问题与解三角形的问题.需要根据题意求得最值时的情况再求解.属于中等题型.

14. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$．若 $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ =____.

【答案】2

【解析】

【详解】如图



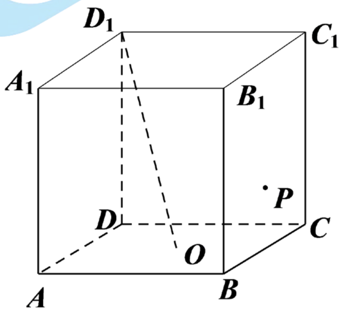
，

因为 $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CE}$,所以四边形 $AECD$ 为平行四边形，所以 AE=DC=1,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ =2

点睛：根据题意 $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ 说明四边形 $AECD$ 为平行四边形，从而解题，注意多画草图去理解题意，同时要熟练向量的线性运算

15. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面 BB_1C_1C 的边界及其内部运动.给出下列四个结论：



①$D_1O\perp AC$；

②存在一点 P，$D_1O\parallel B_1P$；

③若 $D_1O\perp OP$，则△D_1C_1P 面积的最大值为 $\sqrt{5}$；

④若 P 到直线 D_1C_1 的距离与到点 B 的距离相等，则 P 的轨迹为抛物线的一部分.

其中所有正确结论的序号是________________.

【答案】①③

【解析】

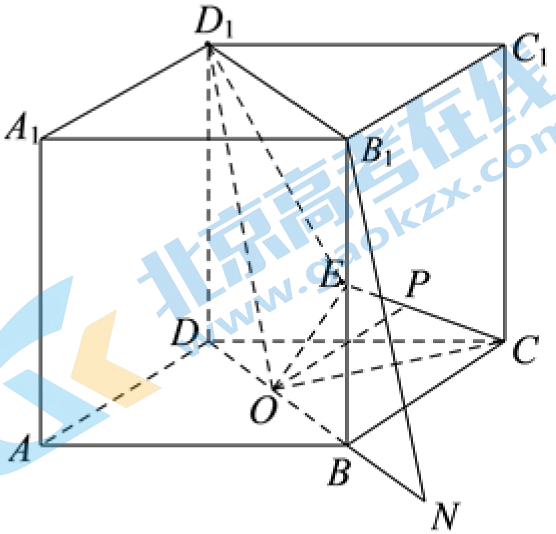
【分析】对于①，连接 AD_1,CD_1，由三角形 ACD_1 为等边三角形判读；

对于②，将 D_1O 进行平移到过 B_1 点，使之具有公共顶点，根据立体图像判断，无论如何也不可能满足 $D_1O\parallel B_1P$；

对于③，连 接OE,EC,BD,D_1E，证明$D_1O\perp$平面OEC，所以P在线段EC上运动，当点P到点E位置时，C_1P最大，此时$\triangle D_1C_1P$面积最大为：$S_{\max}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

对于④，P到直线D_1C_1的距离为线段PC_1的长度，所以$|PC_1|=|PB|$，判定出P点位置即可.

【详解】对于①，连接AD_1,CD_1，由正方体的性质知三角形ACD_1为等边三角形，由于O为底面$ABCD$的中心，故为AC中点，故$AC\perp D_1O$，①正确；



对于②，将D_1O进行平移到过B_1点，使之与B_1P具有公共顶点，根据立体图像判断，无论如何也不可能满足B_1H平行或重合于B_1P，所以D_1O不可能平行于B_1H，②错误；

对于③，取B_1B的中点E，连 接OE,EC,BD,D_1E，

则$OE=\frac{1}{2}DB_1=\sqrt{3},D_1O=\sqrt{6},D_1E=3$，满足$OE^2+D_1O^2=D_1E^2,\therefore OE\perp D_1O$，

又$OC\perp BD,OC\perp DD_1,\therefore OC\perp$面$BDD_1B_1$，$D_1O\subset$面$BDD_1B_1$，所以$OC\perp D_1O$，$OC?OE\quad O$，

所以$D_1O\perp$平面OEC，

所以P在线段EC上运动，当点P到点E位置时，C_1P最大，

此时$\triangle D_1C_1P$面积最大为：$S_{\max}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$.所以③正确.

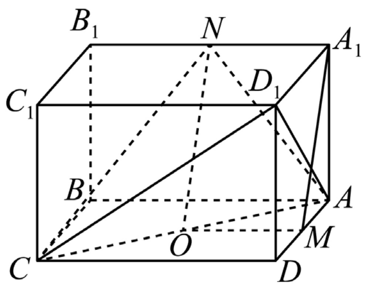
对于④，P到直线D_1C_1的距离为线段PC_1的长度，所以$|PC_1|=|PB|$，判定出P点位置为直线BC_1的垂直平分线，故④错误.

故正确的序号是: ①③.

故答案为: ①③.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 BCC_1B_1 是边长为 1 的正方形，$AB=2$，M，N，O 分别是 AD，A_1B_1，AC 的中点



（1）求证：MA_1 // 平面 ANC；

（2）求直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】（1）要证明一条直线平行于一个平面，只需证明该直线平行于平面内的一条直线即可；

（2）建立空间直角坐标系，运用空间向量数量积计算直线与平面的夹角.

【小问 1 详解】

$\because M$，O 分别是 AD，AC 的中点，

$\therefore OM//CD$，$OM=\dfrac{1}{2}CD$，

$\because N$ 是 A_1B_1 的中点，$\therefore NA_1//CD$，$NA_1=\dfrac{1}{2}CD$，

$\therefore NA_1//OM$ 且 $NA_1=OM$，

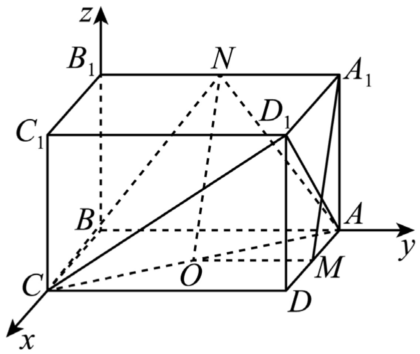
$\therefore$四边形 $NOMA_1$ 是平行四边形，$\therefore MA_1//ON$，

又 $MA_1\not\subset$ 平面 ANC，$ON\subset$ 平面 ANC，

$\therefore MA_1//$ 平面 ANC；

【小问 2 详解】

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 B 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图所示：



则 $C(1,0,0)$，$A(0,2,0)$，$D_1(1,2,1)$，$N(0,1,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CN}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{CA}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{CD_1}=(0,2,1)$

设平面 D_1AC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+2y=0\\ 2y+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(2,1,-2)$，

$\therefore \left|\cos\left\langle\overrightarrow{CN},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CN}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

综上，直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

17. 已知函数 $f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

（I）求 $f(x)$ 的定义域；

（II）设 $\beta\in(0,\pi)$，且 $f(\beta)=2\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，求 β 的值.

【答案】（I）$\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\}$（II）$\beta=\dfrac{\pi}{12}$，或 $\beta=\dfrac{3\pi}{4}$

【解析】

【详解】试题分析：（I）使正切函数有意义，需满足 $x+\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解不等式得定义域；（II）将 β 代入得 $\tan\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，将切化弦结合诱导公式得 $\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left[2\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$，等价于 $\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，或 $\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，结合 β 的范围可得结果.

试题解析：（Ⅰ）由 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$， $k\in Z$．

所以 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$．

（Ⅱ）依题意，得 $\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\dfrac{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$，

整理得 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[2\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$，所以 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，或 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$．

因为 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\beta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，由 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，得 $\beta+\frac{\pi}{4}=\pi$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$；由

$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，得 $\beta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{12}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{12}$，或 $\beta=\frac{3\pi}{4}$．

18. 天文学上用星等表示星体亮度，星等的数值越小，星体越亮．视星等是指观测者用肉眼所看到的星体亮度；绝对星等是假定把恒星放在距地球 32.6 光年的地方测得的恒星的亮度，反映恒星的真实发光本领．下表列出了（除太阳外）视星等数值最小的 10 颗最亮恒星的相关数据，其中 $a\in[0,1.3]$．

星名	天狼星	老人星	南门二	大角星	织女一	五车二	参宿七	南河三	水委一	参宿四
视星等	-1.47	-0.72	-0.27	-0.04	0.03	0.08	0.12	0.38	0.46	a
绝时星等	1.42	-5.53	4.4	-0.38	0.6	0.1	-6.98	2.67	-2.78	-5.85
赤纬	$-16.7°$	$-52.7°$	$-60.8°$	$19.2°$	$38.8°$	$46°$	$-8.2°$	$5.2°$	$-57.2°$	$7.4°$

（1）从表中随机选择一颗恒星，求它的绝对星等的数值小于视星等的数值的概率；

（2）已知北京的纬度是北纬 $40°$，当且仅当一颗恒星的“赤纬”数值大于 $-50°$ 时，能在北京的夜空中看到它．现从这 10 颗恒星中随机选择 4 颗，记其中能在北京的夜空中看到的数量为 X 颗，求 X 的分布列和数学期望；

（3）记 $a=0$ 时 10 颗恒星的视星等的方差为 s_1^2，记 $a=1.3$ 时 10 颗恒星的视星等的方差为 s_2^2，判断 s_1^2 与 s_2^2 之间的大小关系．（结论不需要证明）

【答案】(1) $\frac{1}{2}$；(2) 分布列见解析；数学期望为$\frac{14}{5}$；(3) $s_1^2 < s_2^2$.

【解析】

【分析】(1) 由图表数据可知有5颗恒星绝对星等的数值小于视星等的数值，由古典概型概率公式可计算得到结果；

(2) 首先确定X所有可能取值，利用超几何分布概率公式计算可得每个取值对应的概率，由此可得分布列；根据数学期望计算公式可得期望；

(3) 根据数据的波动程度可得方差大小关系.

【详解】(1) 设一颗星的绝对星等的数值小于视星等的数值为事件A，

由图表可知：10颗恒星有5颗恒星绝对星等的数值小于视星等的数值.

$\therefore P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

(2) 由图表知，有7颗恒星的"赤纬"数值大于$-50°$，有3颗恒星的"赤纬"数值小于$-50°$，则随机变量X的所有可能取值为：1，2，3，4.

$P(X=1)=\frac{C_7^1C_3^3}{C_{10}^4}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$，$P(X=2)=\frac{C_7^2C_3^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10}$，$P(X=3)=\frac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}=\frac{1}{2}$，

$P(X=4)=\frac{C_7^4C_3^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}$.

$\therefore$随机变量X的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=\frac{14}{5}$.

(3) 结论：$s_1^2 < s_2^2$.

理由：当$a=0$时，视星等的平均数为-0.143；当$a=1.3$时，视星等的平均数为-0.013；可知当$a=0$时，视星等的数值更集中在平均数附近，由此可知其方差更小.

【点睛】关键点点睛：本题第二问考查了服从于超几何分布的随机变量的分布列与数学期望的求解，关键是能够确定随机变量服从于超几何分布，进而利用超几何分布概率公式计算得到每个取值对应的概率.

19. 已知函数$f(x)=1-x^2$

(1) 已知直线l与曲线$y=f(x)$相切，且与坐标轴围成等腰三角形，求直线l的方程；

（2）已知$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，设曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(t,f\left(t\right)\right)$处的切线被坐标轴截得的线段长度为$L\left(t\right)$，求$L\left(t\right)$的最大值．

【答案】（1）$y=\pm x+\frac{5}{4}$；（2）$\sqrt{5}$．

【解析】

【分析】(1) $f'\left(x\right)=-2x$，由题意可知直线l的斜率为±1，从而可求出切点的坐标，即可求出切线的方程．

(2)由导数的几何意义可求出切线方程，从而得到切线和坐标轴的交点坐标，从而可得

$L\left(t\right)=\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t}\left(t^2+1\right)$，令$m=t^2\in\left[\frac{1}{4},1\right]$，得$L^2\left(t\right)=S\left(m\right)=\frac{4m^3+9m^2+6m+1}{4m}$，

结合导数可判断$S\left(m\right)$的单调性，从而可求出最大值．

【详解】（1）$f'\left(x\right)=-2x$，由题可知直线l的斜率为±1，令$f'\left(x\right)=\pm1$可得$x=\mp\frac{1}{2}$，

又因为$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，所以直线$l$的方程为$y=\pm x+\frac{5}{4}$．

（2）曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(t,f\left(t\right)\right)$处的切线斜率为$f'\left(t\right)=-2t$，

又因为$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以$f\left(t\right)=1-t^2\geq0$，则切线方程为$y-1+t^2=-2t\left(x-t\right)$，

切线与坐标轴的交点为$\left(0,t^2+1\right),\left(\frac{t^2+1}{2t},0\right)$

所以$L\left(t\right)=\sqrt{\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2+\left(t^2+1\right)^2}=\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t}\left(t^2+1\right)>0$，$L^2\left(t\right)=\frac{\left(1+4t^2\right)\left(t^2+1\right)^2}{4t^2}$，

令$m=t^2\in\left[\frac{1}{4},1\right]$，则$L^2\left(t\right)=S\left(m\right)=\frac{\left(1+4m\right)\left(m+1\right)^2}{4m}=\frac{4m^3+9m^2+6m+1}{4m}$，

$S'\left(m\right)=\frac{8m^3+9m^2-1}{4m^2}$，设$y=8m^3+9m^2-1$，当$m\in\left[\frac{1}{4},1\right]$，$y'=24m^2+18m>0$，

则函数$y=8m^3+9m^2-1$在$m\in\left[\frac{1}{4},1\right]$时单调递增，

且当$m=\frac{1}{4}$时，$8m^3+9m^2-1<0$，当$m=1$时，$8m^3+9m^2-1>0$，

所以存在$m_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，$8{m_0}^3+9{m_0}^2-1=0$，即$S'(m_0)=0$.

$S(m)$与$S'(m)$在区间$\left[\frac{1}{4},1\right]$上的情况如下：

m	$\left[\frac{1}{4},x_0\right)$	x_0	$(x_0,1]$
$S'(m)$	$-$	0	$+$
$S(m)$	□	极小值	□

又因为$S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{8}<S(1)=5$，所以当$m=1$即$t=1$时，$L(t)$取到最大值$\sqrt{5}$.

【点睛】关键点睛:

本题第二问的关键是求$L(t)$的函数表达式，结合导数和函数零点和方程根的关系可求出$L^2(t)$的单调性，

从而可求出最大值.

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$P(\sqrt{2},1)$. 直线$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$与椭圆$C$

相交于A,B两点.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）求ΔPAB的面积的最大值；

（Ⅲ）设直线PA，PB分别与y轴交于点M，N. 判断$|PM|$，$|PN|$大小关系，并加以证明.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ （2）$\sqrt{2}$ （3）见解析

【解析】

【详解】试题分析：

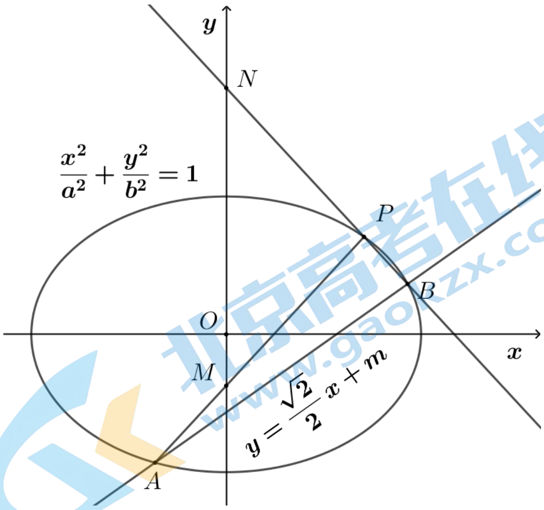
(1)由题意求得$a^2=4,b^2=2$，所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 联立直线与椭圆的方程，由题意可得$|AB|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-m^2}$. 三角形的高为$d=\frac{\sqrt{2}|m|}{\sqrt{3}}$. ，面积表达式

$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{-(m^2-2)^2+4}\le\sqrt{2}$，当且仅当 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$S=\sqrt{2}$．即□PAB 的面积的最大值是 $\sqrt{2}$．

(3)结论为 $|PM|=|PN|$．利用题意有 $\angle PMN=\angle PNM$．所以 $|PM|=|PN|$．

试题解析：



解：（Ⅰ）设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的半焦距为 c．

因为椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，　即 $a^2=2b^2$．

由 $\begin{cases}a^2=2b^2,\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

（Ⅱ）将 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

消去 y 整理得 $x^2+\sqrt{2}mx+m^2-2=0$．

令 $\Delta=2m^2-4(m^2-2)>0$，解得 $-2<m<2$．

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

则 $x_1+x_2=-\sqrt{2}m$，$x_1x_2=m^2-2$．

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-m^2}．$$

点 $P\left(\sqrt{2},1\right)$ 到直线 $x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}m=0$ 的距离为 $d=\frac{\left|\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}m\right|}{\sqrt{1+2}}=\frac{\sqrt{2}|m|}{\sqrt{3}}$．

所以△PAB的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|\cdot\sqrt{4-m^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{-\left(m^2-2\right)^2+4}\le\sqrt{2}，$$

当且仅当 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$S=\sqrt{2}$．

所以△PAB的面积的最大值是 $\sqrt{2}$．

（III）$|PM|=|PN|$．证明如下：

设直线 PA，PB 的斜率分别是 k_1，k_2，

则 $k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}=\frac{(y_1-1)\left(x_2-\sqrt{2}\right)+(y_2-1)\left(x_1-\sqrt{2}\right)}{\left(x_1-\sqrt{2}\right)\left(x_2-\sqrt{2}\right)}$．

由（II）得 $(y_1-1)\left(x_2-\sqrt{2}\right)+(y_2-1)\left(x_1-\sqrt{2}\right)$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m-1\right)\left(x_2-\sqrt{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m-1\right)\left(x_1-\sqrt{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}(m-1)$$

$$=\sqrt{2}\left(m^2-2\right)+(m-2)\left(-\sqrt{2}m\right)-2\sqrt{2}(m-1)$$

$$=0，$$

所以直线 PA，PB 的倾斜角互补．

所以 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle PMN=\angle PNM$.

所以 $|PM|=|PN|$.

21. 设数集S满足：①任意 $x\in S$ ，有 $x\geq 0$ ；②任意 x 、$y\in S$，有 $x+y\in S$ 或 $|x-y|\in S$，则称数集S具有性质 P.

（1）判断数集 $A=\{0,1,2,4\}$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（2）若数集 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 且 $a_i<a_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,n-1\right)$ 具有性质 P.

（i）当 $n=2021$ 时，求证：a_1、a_2、$\cdots$、a_n 是等差数列；

（ii）当 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 不是等差数列时，写出 n 的最大值.（结论不需要证明）

【答案】（1）不具有，理由见解析；（2）（i）证明见解析；（ii）4.

【解析】

【分析】（1）根据性质 P 的定义判断可得出结论；

（2）（i）推导得出 $a_1=0$，利用性质 P 的定义推导出 $a_{2021}-a_i=a_{2022-i}\left(i=2,3,\cdots,2020\right)$，

$a_{2020}-a_i=a_{2021-i}\left(i=3,4,\cdots,2019\right)$，两式作差可推导出数列 a_1、a_2、$\cdots$、a_{2021} 为等差数列；

（ii）根据性质 P 的定义可得出 n 的最大值.

【详解】（1）因为 $4+1\notin S$，$4-1\notin S$，因此，数集A不具有性质 P；

（2）（i）因为 $a_{2021}+a_{2021}=2a_{2021}>a_{2021}$，所以，$a_{2021}+a_{2021}\notin B$，

所以，$|a_{2021}-a_{2021}|=0\in B$，即 $a_1=0$，

因为 $a_i<a_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,n-1\right)$，

所以，$a_{2021}+a_{2020}>a_{2021}+a_{2019}>\cdots>a_{2021}+a_2>a_{2021}$，

所以，$a_{2021}+a_i\notin B\left(i=2,3,\cdots,2020\right)$，所以，$a_{2021}-a_i\in B\left(i=2,3,\cdots,2020\right)$，

因为 $0<a_{2021}-a_{2020}<a_{2021}-a_{2019}<\cdots<a_{2021}-a_2<a_{2021}$，

所以，$a_{2021}-a_i=a_{2022-i}\left(i=2,3,\cdots,2020\right)$，①

所以，$a_{2021}=a_{2020}+a_2$，$a_{2021}=a_{2019}+a_3$，

因为 $a_{2020}+a_{2019}>a_{2020}+a_{2018}>\cdots>a_{2020}+a_3>a_{2020}+a_2=a_{2021}$，

所以，$a_{2020}+a_i \notin B\left(i=3,4,\cdots,2019\right)$，所以，$a_{2020}-a_i \in B\left(i=3,4,\cdots,2019\right)$，

因为$0<a_{2020}-a_{2019}<a_{2020}-a_{2018}<\cdots<a_{2020}-a_3<a_{2020}-a_2<a_{2020}$，

所以，$a_{2020}-a_{2019}=a_2$，$a_{2020}-a_3=a_{2018}$，

否则$a_{2020}-a_{2019}=a_k\left(k\geq 3\right)$，得$a_{2020}\geq a_{2019}+a_3=a_{2021}$，矛盾.

$a_{2020}-a_3=a_l\left(l\geq 2019\right)$，得$a_{2020}\geq a_3+a_{2019}=a_{2021}$，矛盾.

所以，$a_{2020}-a_i=a_{2021-i}\left(i=3,4,\cdots,2019\right)$，②

①$-$②得$a_{2022-i}-a_{2021-i}=a_{2021}-a_{2020}=a_2\left(i=3,4,\cdots,2019\right)$，

即$a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_{2019}-a_{2018}=a_2$，

所以，$a_{i+1}-a_i=a_2\left(i=1,2,\cdots,2020\right)$为等差数列；

（ii）n的最大值为4.

【点睛】方法点睛：等差数列的三种判定方法：

（1）定义法：$a_{n+1}-a_n=d$（常数）$\left(n\in N^*\right)\Leftrightarrow$数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列；

（2）等差中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\left(n\in N^*\right)\Leftrightarrow$数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列；

（3）通项公式法：$a_n=an+b$（a、b为常数，$n\in N^*$）$\Leftrightarrow$数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列.

但如果要证明一个数列是等差数列，则必须用定义法或等差中项法.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。