2024 年普通高等学校招生全国统一考试仿真试题

数学(三)

本试卷共 4 页,19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$,则 $\tan\alpha=$

A. -3　　B. -1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 1

2. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$,满足 $\frac{2+a\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}=b$,则 $\bar{z}$ 在复平面内所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 在 $(x+1)(x-1)^5$ 展开式中 x^3 的系数为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

4. 已知四面体 $ABCD$ 中,M 为 AB 中点,N 为 AC 中点,m 为平面 BCD 内任一直线,则"直线 MN 与直线 m 异面"是"m 与直线 BC 相交"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 已知 F_1,F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(b_1>0)$ 和双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b_2^2}=1(b_2>0)$ 的公共焦点,P 为它们的公共点,且 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$,则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

6. 复印纸按照幅面的基本面积,把幅面规格分为 A 系列、B 系列、C 系列,其中 A 系列的幅面规格为:$A_0,A_1,A_2,A_3,\cdots,A_8$,所有规格的纸张的长度(以 x 表示)和幅宽(以 y 表示)的比例关系都为 $x:y=\sqrt{2}:1$;将 A_0 纸张沿长度方向对开成两等分,便成为 A_1 规格;将 A_1 纸张沿长度方向对开成两等分,便成为 A_2 规格;…,如此对开至 A_8 规格. 现有 $A_0,A_1,A_2,A_3,\cdots,A_8$ 纸各一张,已知 A_0 纸的幅面面积为 1 m^2,则 $A_0,A_1,A_2,A_3,\cdots,A_8$ 这 9 张纸的面积之和是

A. $\frac{511}{256}\ \mathrm{m}^2$　　B. $\frac{511}{512}\ \mathrm{m}^2$　　C. $\frac{255}{128}\ \mathrm{m}^2$　　D. $\frac{255}{256}\ \mathrm{m}^2$

7. 已知在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$C=\frac{\pi}{3}$,$c^2=\frac{3}{\sin A\sin B}$,则 c 的取值范围为

A. $(0,3]$　　B. $[2,\sqrt{6})$　　C. $(1,3]$　　D. $(\sqrt{3},3]$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,F 为 C 的右焦点,C 的离心率为 2,若 P 为 C 右支上一点,满足 $PF\perp FA_2$,则 $\tan\angle A_1PA_2=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得 3 分,有选错的得 0 分.

9. 已知圆 $C:x^2+y^2-2x-6=0$,$M(x,y)$ 为圆 C 上任意一点,$A(1,-1)$,则

A. $|MC|=1$

B. 直线 $l:y=x+b$ 过点 A,则 C 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{7}-1\leqslant|MA|\leqslant\sqrt{7}+1$

D. 圆 C 与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为 $4\sqrt{42}$

10. 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,则

A. X 的密度曲线与 y 轴只有一个交点

B. X 的密度曲线关于 $x=\sigma$ 对称

C. $2P(X>\mu+3\sigma)=P(|X-\mu|>3\sigma)$

D. 若 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$,则 $E(Y)=0$

11. 已知函数 $f(x),g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数,且 $f(x)+g'(x)-8=0$,$f(x)-g'(4-x)-8=0$,若 $g(x)$ 为偶函数,则

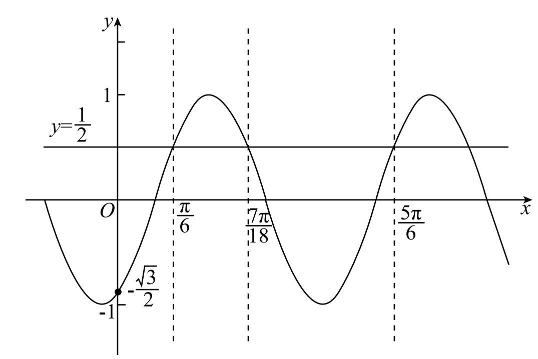
A. $f(1)+f(3)=16$　　B. $f(4)=8$

C. $f(-1)=f(-3)$　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2\,023}g'(k)=0$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 若集合 $A=\{(x,y)\,|\,|y-1|+(x+y-3)^2+1-y=0\}$,集合 $B=\{(x,y)\,|\,y^2=4x\}$,则 $A\cap B=$________.

13. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in(-\pi,\pi))$ 的图象如图所示,与 y 轴的交点坐标为 $\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的相邻三个交点的横坐标依次为 $\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{6}$,则 $\frac{\varphi}{\omega}$ 的值为________.



14. 在首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 中 $a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,若存在 $n\in\mathbf{N}^*$,使得不等式 $(m-a_n)(m+a_{n+3})>0$ 成立,则 m 的取值范围为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

15.(本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x+ax+2$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-2y+2=0$ 相互垂直.

(1)求实数 a 的值;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

16.(本小题满分 15 分)

近年来,我国新能源汽车技术水平不断进步、产品性能明显提升,产销规模连续六年位居世界首位.某汽车城从某天开始连续的营业天数 x 与新能源汽车销售总量 y(单位:辆)的统计数据如下表所示:

从某天开始连续的营业天数 x	10	20	30	40	50
新能源汽车销售总量 y/辆	62	68	75	81	89

(1)已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系,请用相关系数加以说明(结果精确到 0.001);

(2)求 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,并预测该汽车城连续营业 130 天的汽车销售总量.

参考数据:$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=11\ 920$,$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=28\ 575$,$\sqrt{5}\approx 2.236$.

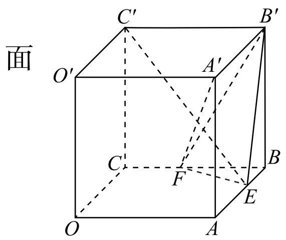
参考公式:相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$,经验回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率与截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

17.(本小题满分 15 分)

如图,在棱长为 1 的正方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中,E,F 分别是棱 AB,BC 上的动点,且 $AE=BF$.

(1)求证:$A'F\perp C'E$;

(2)当三棱锥 $B'-BEF$ 的体积取得最大值时,求平面 $B'EF$ 与平面 BEF 的夹角的正弦值.

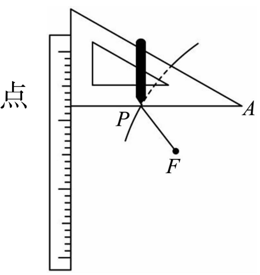


18.(本小题满分 17 分)

如图,小明同学先把一根直尺固定在画板上面,把一块三角板的一条直角边紧靠在直尺边沿,再取一根细绳,它的长度与另一直角边相等,让细绳的一端固定在三角板的顶点 A 处,另一端固定在画板上点 F 处,用铅笔尖扣紧绳子(使两段细绳绷直),靠住三角板,然后将三角板沿着直尺上下滑动,这时笔尖在平面上画出了圆锥曲线 C 的一部分图象.已知细绳长度为 3,经测量,当笔尖运动到点 P 处,此时,$\angle FAP=30°$,$\angle AFP=90°$.设直尺边沿所在直线为 a,以过 F 垂直于直尺的直线为 x 轴,以过 F 垂直于 a 的垂线段的中垂线为 y 轴,建立平面直角坐标系.

(1)求曲线 C 的方程;

(2)斜率为 k 的直线 l 过点 $D(0,-3)$,且与曲线 C 交于不同的两点 M,N,已知 k 的取值范围为 $(0,2)$,若 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$,求 λ 的范围.



19.(本小题满分 17 分)

“物不知数”是中国古代著名算题,原载于《孙子算经》卷下第二十六题:“今有物不知其数,三三数之剩二;五五数之剩三;七七数之剩二.问物几何?”问题的意思是,一个数被 3 除余 2,被 5 除余 3,被 7 除余 2,那么这个数是多少?若一个数 x 被 m 除余 r,我们可以写作 $x\equiv r(mod m)$.它的系统解法是秦九韶在《数书九章》大衍求一术中给出的.大衍求一术(也称作“中国剩余定理”)是中国古算中最有独创性的成就之一,现将满足上述条件的正整数从小到大依次排序.中国剩余定理:假设整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 两两互质,则对任意的整数:$r_1,r_2,\cdots,r_n$,方程组 $\begin{cases}x\equiv r_1(mod m_1)\\x\equiv r_2(mod m_2)\\\cdots\cdots\\x\equiv r_n(mod m_n)\end{cases}$ 一定有解,并且通解为 $x=kM+r_1t_1M_1+r_2t_2M_2+\cdots+r_nt_nM_n$,其中 k 为任意整数,$M=m_1m_2\cdots m_n$,$M_i=\dfrac{M}{m_i}$,t_i 为整数,且满足 $M_it_i\equiv 1(mod m_i)$.

(1)求出满足条件的最小正整数,并写出第 n 个满足条件的正整数;

(2)在不超过 4 200 的正整数中,求所有满足条件的数的和.(提示:可以用首尾进行相加).