2023 北京牛栏山一中高三 10 月月考

数　学

一、单选题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1. 已知全集$U=\{x|x+1>0\}$，集合$A=\{x|x-2>0\}$，则$\complement_U A=$（　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(-1,2]$　　D. $(-1,2)$

2. 命题“$\exists x>0$，使得$2^x\geq1$”的否定为（　）

A. $\exists x>0$，使得$2^x<1$　　B. $\exists x\leq0$，使得$2^x\geq1$

C. $\forall x>0$，都有$2^x<1$　　D. $\forall x\leq0$，都有$2^x<1$

3. 若$a>b>c$，则（　）

A. $a-c>a-b$　　B. $a>b+c$　　C. $a+b>c$　　D. $a-b>b-c$

4. 下列函数在定义域内单调递增的是（　）

A. $y=-\frac{1}{x}$　　B. $y=\tan x$　　C. $y=-\lg x$　　D. $y=x^{\frac{1}{2}}$

5. 已知函数$f(x)=\ln x+x-4$，在下列区间中，包含$f(x)$零点的区间是（　）

A. （0，1）　　B. （1，2）　　C. （2，3）　　D. （3，4）

6. 已知平面向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(3,-1)$，$\vec{c}=(t,t)$，若$(\vec{a}+\vec{c})\parallel\vec{b}$，则$t=$（　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{5}{4}$　　D. $-\frac{7}{4}$

7. 已知数列$\{a_n\}$是无穷项等比数列，“$a_3>a_2>a_1$”是“$\{a_n\}$单调递增”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

8. 点声源在空间中传播时，衰减量ΔL（单位：dB）与传播距离 r（单位：米）的关系式为$\Delta L=10\lg\frac{\pi r^2}{4}$，则$r$从 5 米变化到 40 米时，衰减量的增加值约为（　）

参考数据：$\lg2\approx0.3$

A.24dB　　B. 18dB　　C. 16dB　　D. 12dB

9. 在边长为 1 的正六边形$ABCDEF$中，点P为其内部或边界上一点，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$的取值范围为（　）

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,3]$　　C. $[-3,1]$　　D. $[-3,3]$

10. 已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若$f(x+m)$的图像关于坐标原点对称，$f(x+n)$的图像关于y轴对称，则$|m|+|n|$的最小值为（　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3}{4}\pi$　　D. π

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ 的定义域为______.

12. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$，$a+2b=12$，则 ab 的最大值为__________.

13. 已知 α 为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{11}{14}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$__________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\frac{\lambda}{n}$，$n\in\mathbf{N}^{*}$，且 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则实数 λ 的取值范围是__________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+2ax+1, & x\le 0\\ |2^x-2|, & x>0\end{cases}$，有下面四个命题：

①当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 单调递减；

②若 $f(x)$ 恰有两个不同的零点，则 $a<0$；

③若函数 $g(x)=f(x)-k$ 恰有 4 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4<0$；

④对于任意的 $a\in\mathbf{R}$，函数 $h(x)=f(x)-1$ 恰有 3 个不同的零点.

其中，全部正确命题的序号为__________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+a\cos^2 x$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

（1）求 a 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

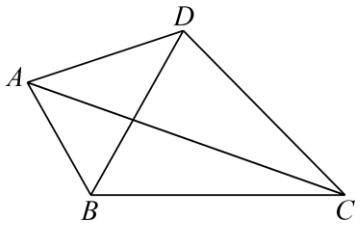
（3）若对于任意的 $x\in[0,m]$，总有 $f(x)\ge f(0)$，直接写出 m 的最大值.

17. 已知函数 $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最大值和最小值.

18. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$ 为钝角，且 $2AC\cdot\sin\angle BAC=\sqrt{3}BC$.



（1）求 $\angle ABC$ 的大小；

（2）$AB=2$，$AC=2\sqrt{7}$，BD 平分 $\angle ABC$，且 $\triangle BCD$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，求边 CD 的长.

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，$|A_1A_2|=4$，椭圆 E 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）过 $D(1,0)$ 作直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 M，N，其中 l 与 x 轴不重合，直线 A_1M 与直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 交于点 P，判断直线 A_2N 与 DP 的位置关系，并说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2x\ln x$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值；

（2）若对于任意的 $x\in(1,\mathrm{e})$，总有 $m<\dfrac{\ln x}{x^2-1}<n$，请求出 m 的最大值和 n 的最小值.

21. 已知 $S=\{1,2,\ldots,n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，记 $A_i=\{x|x=a+t_i,a\in A\}(i=1,2)$，用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

（I）若 $n=5$，$A=\{1,2,5\}$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，求 T；

（II）若 $n=7$，$|A|=4$，则对于任意的 A，是否都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$？说明理由；

（III）若 $|A|=5$，对于任意的 A，都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$，求 n 的最小值.

参考答案

一、单选题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1.【答案】C

【解析】

【分析】先分别写出集合 A,U，在根据补集的定义求解.

【详解】依题意，$U=\{x|x>-1\}$，$A=\{x|x>2\}$，根据补集的定义：$\complement_U A=\{x|-1<x\le 2\}=(-1,2]$.

故选：C

2.【答案】C

【解析】

【分析】

利用含有一个量词的命题的否定定义得出选项.

【详解】命题"$\exists x>0$，使得 $2^x\ge 1$"的否定为"$\forall x>0$，都有 $2^x<1$"

故选：C

3.【答案】A

【解析】

【分析】对 A，由不等式的基本性质可证明，对 B、C、D 通过举例可判断.

【详解】对 A，由 $a>b>c$，可得 $-c>-b$，从而有 $a-c>a-b$ 成立，故 A 正确；

对 B、D，若 $a=3,b=2,c=1$，则 $a=b+c$，$a-b=b-c$，故 B、D 不正确；

对 C，若 $a=-1,b=-2,c=-3$，则 $a+b=c$，故 C 不正确.

故选：A

4.【答案】D

【解析】

【分析】根据函数解析式结合基本的性质逐个分析判断.

【详解】对于 A，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，但在定义域内不单调递增，如当 $-1<1$，而 $f(-1)=1>f(1)=-1$，所以 A 错误，

对于 B，定义域为 $\left\{x\middle|x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$，函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in Z)$ 上单调递增，但在定义域内不单调递增，所以 B 错误，

对于 C，定义域为 $(0,+\infty)$，函数 $y=-\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 C 错误，

对于 D，定义域为 $[0,+\infty)$，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 D 正确，

故选：D

5.【答案】C

【解析】

【分析】

判断函数的单调性，以及 f（2），f（3）函数值的符号，利用零点存在性定理判断即可.

【详解】函数 $f(x)=\ln x+x-4$，是增函数且为连续函数，

又 f（2）$=\ln 2+2-4<0$，

f（3）$=\ln 3+3-4>0$，

可得 $f\left(2\right)f\left(3\right)<0$

所以函数 $f(x)=\ln x+x-4$ 包含零点的区间是 $(2,3)$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查零点存在定理的应用，应用零点存在定理解题时，要注意两点：（1）函数是否为单调函数；（2）函数是否连续.

6.【答案】C

【解析】

【分析】先求出 $\vec{a}+\vec{c}$ 的坐标，再由 $\left(\vec{a}+\vec{c}\right)//\vec{b}$ 列方程可求出 t 的值.

【详解】因为 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{c}=\left(t,t\right)$，

所以 $\vec{a}+\vec{c}=\left(-1+t,2+t\right)$，

因为 $\vec{b}=\left(3,-1\right)$，$\left(\vec{a}+\vec{c}\right)//\vec{b}$，

所以 $\dfrac{-1+t}{3}=\dfrac{2+t}{-1}$，解得 $t=-\dfrac{5}{4}$，

故选：C

7.【答案】C

【解析】

【分析】根据等比数列的通项公式以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可

【详解】因为 $\left\{a_n\right\}$ 单调递增，所以 $a_3>a_2>a_1$，所以必要性成立；

因为数列 $\left\{a_n\right\}$ 是无穷项等比数列，且 $a_3>a_2>a_1$，

所以 $a_1q^2>a_1q>a_1$，

当 $a_1>0$ 时，则 $q^2>q>1$ 解得 $q>1$，此时 $a_n>0$，所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q>1\left(n\geq 2\right)$，即 $a_n>a_{n-1}\left(n\geq 2\right)$；

当 $a_1<0$ 时，则 $q^2<q<1$ 解得 $0<q<1$，此时 $a_n<0$，所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q<1\left(n\geq 2\right)$，即 $a_n>a_{n-1}\left(n\geq 2\right)$，

综上所述，$a_n>a_{n-1}\left(n\geq 2\right)$ 即 $\left\{a_n\right\}$ 单调递增，所以充分性成立，

则“$a_3 > a_2 > a_1$”是“$\{a_n\}$单调递增”的充分必要条件，

故选：C

8.【答案】B

【解析】

【分析】根据对数的运算法则化简计算即可求得增加值.

【详解】由已知$\Delta L = 10\lg\dfrac{\pi r^2}{4}$，

所以 r 从 5 米变化到 40 米衰减量的增加值为$10\lg\dfrac{40^2\pi}{4} - 10\lg\dfrac{5^2\pi}{4}$=$10\lg 64$，

整理得$10\lg 64$=$10\lg 2^6$=$60\lg 2 \approx 18$.

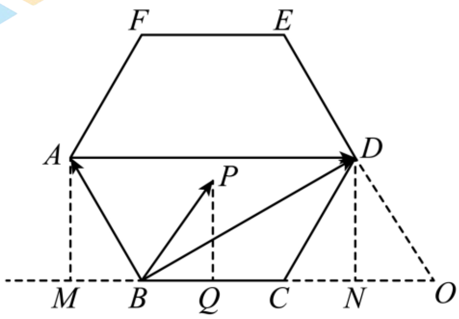
故选：B

9.【答案】B

【解析】

【分析】根据向量的共线表示以及平面向量基本定理，可表达出$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$=$2\lambda$，结合图形特征以及数量积的运算即可求解.

【详解】



延长ED, BC交于O点，过P过$PQ\perp BC$交BC于Q，过D过$DN\perp BC$交BC于N，过A过$AM\perp BC$交BC于M，

在$\text{Rt}\triangle CND$中，DN=$DC\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，在$\text{Rt}\triangle BND$中，$BN$=$\dfrac{DN}{\tan 30^\circ}$=$\dfrac{3}{2}$，

易得$\angle DCO$=$\angle CDO$=$\dfrac{\pi}{3}$,所以$\triangle DCO$是等边三角形，

所以OD=CD=OC=AB，因为OD//AB，所以四边形$ODAB$是平行四边形，

所以$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{BC}$，

因为$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{ND}$，其中$-\dfrac{1}{2} \le \lambda \le \dfrac{3}{2}, 0 \le \mu \le 2$，

所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$=$2\overrightarrow{BC}\cdot\left(\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{ND}\right)$=$2\lambda\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ +$2\mu\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ND}$，

因为$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{ND}$，所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ND}$=0，

所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$=$2\lambda$，

当 P 点与 D 点重合时，此时 $\lambda=\frac{3}{2}$，$\mu=1$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$ 取得最大值为 3；

当 P 点与 A 点重合时，此时 $\lambda=-\frac{1}{2}$，$\mu=1$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$ 取得最小值为 -1，

$\therefore\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的取值范围是 $[-1,3]$.

故选：B

10.【答案】A

【解析】

【分析】根据条件列关系式求 m，n，结合绝对值三角不等式求 $|m|+|n|$ 的最小值，可得结论.

【详解】因为 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，所以 $f(x+m)=\sin(2x+2m+\varphi)$，

$f(x+n)=\sin(2x+2n+\varphi)$，因为 $f(x+m)$ 的图像关于坐标原点对称，$f(x+n)$ 的图像关于 y 轴对称，所以 $2m+\varphi=k_1\pi$，$2n+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$，$k_1\in Z$，$k_2\in Z$，

所以 $m=\frac{k_1\pi-\varphi}{2}$，$n=\frac{k_2\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}$，所以 $|m|+|n|\geq|m-n|=\left|\frac{(k_1-k_2)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right|$，$k_1\in Z$，$k_2\in Z$，当且仅当 m，n 异号或 $mn=0$ 时等号成立，所以 $|m|+|n|\geq\frac{\pi}{4}$，当且仅当 $k_1=k_2$，且 m，n 异号或 $mn=0$ 时等号成立，所以 $|m|+|n|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$，

故选：A.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】$[0,3)\cup(3,+\infty)$

【解析】

【分析】由二次根式以及分式有意义的条件即可求解.

【详解】由题意自变量 x 应满足 $\begin{cases}x\geq0\\x-3\neq0\end{cases}$，解得 $x\geq0$ 且 $x\neq3$，

所以函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ 的定义域为 $[0,3)\cup(3,+\infty)$.

故答案为：$[0,3)\cup(3,+\infty)$.

12.【答案】18

【解析】

【分析】$ab=\frac{1}{2}a\cdot2b$，而 $a+2b=12$ 是定值，可利用基本不等式的变形：$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 进行求解.

【详解】由基本不等式，$ab=\frac{1}{2}a\cdot 2b\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 6^2=18$，当且仅当$\begin{cases}a+2b=12\\a=2b\end{cases}$取到等号，即$a=6,b=3$时，$ab$的最大值是$18$.

故答案为：18

13.【答案】$-\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】利用同角关系式以及两角和的正弦公式即得.

【详解】因为a是第二象限角，且$\sin\alpha=\frac{11}{14}$，

所以$\cos a=-\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

故$\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{11}{14}\times\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{7}$.

故答案为：$-\frac{1}{7}$.

14.【答案】$(-\infty,2)$

【解析】

【分析】根据数列$\{a_n\}$为单调递增数列，可得到相应的不等式恒成立，即可求得答案.

【详解】∵数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+\frac{\lambda}{n}$，

数列$\{a_n\}$是递增数列，

$\therefore a_{n+1}-a_n=n+1+\frac{\lambda}{n+1}-n-\frac{\lambda}{n}=\frac{-\lambda}{n(n+1)}+1>0$，$n\in\mathbf{N}^*$恒成立

即$\lambda<n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，而$n^2+n,n\in\mathrm{N}^*$随n的增大而增大，

即当n=1时，$n^2+n,n\in\mathrm{N}^*$取得最小值2，则$\lambda<2$，

所以实数λ的取值范围是$(-\infty,2)$，

故答案为：$(-\infty,2)$.

15.【答案】①③

【解析】

【分析】①先判断$a<0,x\le 0$时，$f(x)$的函数解析式和在$[-1,0]$的单调性，然后判断$f(x)$在$x>0$时的函数解析式和单调性，然后再比较两段单调函数在x=0处的函数值，判断其单调性即可；②分别计算$a<0,a=0,a>0$时，$f(x)$恰有两个不同的零点的a的取值即可；③先利用$x\le 0$时，$g(x)=f(x)-k$为二次函数，计算出两个根之和为其对称轴x取值的两倍，然后再计算$x>0$时的两根的关系为

$2^{x_4}+2^{x_3}=4$，然后利用均值不等式，得到$x_3+x_4<2$，然后利用不等式的性质，得到$x_1+x_2+x_3+x_4<0$；④当a=0时，$h(x)=f(x)-1$显然不会恰有三个零点，所以错误.

【详解】①$a<0,x\le 0$时，函数$y=ax^2+2ax+1$开口向下且对称轴为$x=-1$，所以$f(x)$在$[-1,0]$单调递减，其最小值为$f(0)=1$，当$0<x\le 1$时，$f(x)=\left|2^x-2\right|=2-2^x$，由复合函数的单调性可知此时$f(x)$单调递减，且$x$=0时$2-2^x=2-2^0=1=f(0)$，所以当$x\in[-1,1]$时，$f(x)$单调递减，故①正确；②当$a$=0时，$f(x)=\begin{cases}1,x\le 0\\ \left|2^x-2\right|,x>0\end{cases}$，显然$f(x)$没有两个零点，当$x>0$时，令$f(x)$=0，得$f(x)=\left|2^x-2\right|=0$，解得$x$=1，所以当$x>0$时，$f(x)$恰有一个零点，要使$f(x)$恰有两个零点，只需$x\le 0$时，$f(x)$恰有一个零点即可，由①可知，当$a<0,x\le 0$时，函数$y=ax^2+2ax+1$开口向下且对称轴为$x=-1$，$f(x)$在$[-1,0]$单调递减，其最小值为$f(0)=1$，所以$[-1,0]$无零点，$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，且$f(-1)>f(0)=1>0$，所以此时$f(x)$恰有一个零点满足题意，当$a>0,x\le 0$时，函数$y=ax^2+2ax+1$开口向下且对称轴为$x=-1$，且$f(0)=1$，所以要使$f(x)$在$x\le 0$时，恰有一个零点，只需$f(-1)=a-2a+1=0$即可，解得$a$=1，综上所述要使$f(x)$恰有两个不同的零点，得$a\in(-\infty,0)\cup\{1\}$，故②错误；③显然当$x>0$时，$f(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，所以此时$g(x)=f(x)-k$最多有两个零点，当$x\le 0$，$f(x)=ax^2+2ax+1$，显然该函数为二次函数，所以$g(x)=f(x)-k$，最多有两零点，要使函数$g(x)=f(x)-k$恰有4个不同的零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，则$x\le 0$时$f(x)$恰有两个零点，$x>0$时，$f(x)$恰有两个零点，不妨设$x_1<x_2<0<x_3<x_4$，因为$x\le 0$时，$g(x)=ax^2+2ax+1-k$关于$x=-1$对称，所以$x_1+x_2=-2$，当$x>0$时，得$g(x_3)=f(x_3)-k=0$，$g(x_4)=f(x_4)-k=0$，所以有$f(x_3)=f(x_4)$，得$\left|2^{x_3}-2\right|=\left|2^{x_4}-2\right|$，又因为$x_3<x_4$，所以有$2-2^{x_3}=2^{x_4}-2$，得$2^{x_4}+2^{x_3}=4$，由均值不等式可知$2^{x_4}+2^{x_3}\ge 2\sqrt{2^{x_4}2^{x_3}}$，当$2^{x_4}=2^{x_3}$时等号成立，因为$x_3<x_4$，所以$2^{x_4}\ne 2^{x_3}$，故$2^{x_4}+2^{x_3}>2\sqrt{2^{x_4}2^{x_3}}$，因为$2^{x_4}+2^{x_3}=4$，得$4>2\sqrt{2^{x_4}2^{x_3}}$，得$4>2^{x_3+x_4}$，得$x_3+x_4<2$，又因为$x_1+x_2=-2$，所以得$x_1+x_2+x_3+x_4<0$，故③正确；④当$a$=0时，$f(x)=\begin{cases}1,x\le 0\\ \left|2^x-2\right|,x>0\end{cases}$，令$h(x)=f(x)-1=0$，即$f(x)$=1显然由无穷多零点，故④错误.

故填：①③

三、解答题（共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.【答案】（1）$a=2\sqrt{3}$；

（2）函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π，单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in Z$；

（3）m 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

【解析】

【分析】(1)由条件列方程求 a，(2)由辅助角公式化简函数表达式，结合正弦函数的性质求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期及单调递增区间；(3)解不等式求 x 的范围，由此确定 m 的最大值.

【小问 1 详解】

因为 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x+a\cos^2 x$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，所以 $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+a\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2=\sqrt{3}$，所以

$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+a\left(\frac{1}{2}\right)^2=\sqrt{3}$，所以 $\frac{a}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=2\sqrt{3}$，

【小问 2 详解】

由(1) $f\left(x\right)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x$，化简得 $f\left(x\right)=\sin 2x+\sqrt{3}\left(\cos 2x+1\right)$，

所以 $f\left(x\right)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in Z$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in Z$；

【小问 3 详解】

由 $f\left(x\right)\ge f\left(0\right)$，可得 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\ge 2\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$2k\pi+\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in Z$，化简可得 $k\pi\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$

由对于任意的 $x\in[0,m]$，总有 $f\left(x\right)\ge f\left(0\right)$ 可得 m 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

17.【答案】（1）$2x+y-1=0$

（2）最大值为 $\frac{5}{e}$，最小值为 1

【解析】

【分析】（1）第一问先对函数求导，然后分别求出 $f(0), f'(0)$ 的值，由此即可求解.

（2）先根据导函数求出函数的单调区间，然后根据函数单调性确定其最值.

【小问 1 详解】

对函数 $f(x)=\left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x$ 求导得，$f'(x)=\left(x^2-3x+1+2x-3\right)\mathrm{e}^x=\left(x^2-x-2\right)\mathrm{e}^x$，

所以 $f(0)=1, f'(0)=-2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=-2(x-0)$，

化简并整理得该切线方程为 $2x+y-1=0$.

【小问 2 详解】

由（1）可知 $f'(x)=\left(x^2-x-2\right)\mathrm{e}^x=(x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$，

当 $x\in[-2,0]$ 时，$f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$[-2,-1)$	-1	$(-1,0]$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

由上表可知函数 $f(x)=\left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x$ 在 $[-2,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0]$ 上单调递减，且在 $x=-1$ 时 $f(x)$ 取得极大值，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最大值 $f(-1)=\dfrac{5}{\mathrm{e}}$，

而 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最小值为 $f(0), f(-2)$ 中的较小者，

又 $0<\mathrm{e}<3$，所以 $f(0)=1<\dfrac{11}{9}<\dfrac{11}{\mathrm{e}^2}=f(-2)$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最小值为 $f(0)=1$.

18. 【答案】（1）$\dfrac{2\pi}{3}$

（2）$\sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据条件，运用正弦定理即可；

(2) 根据条件，运用余弦定理先求出 BC，再根据面积求出 BD，最后再运用余弦定理求出 CD.

【小问 1 详解】

由条件可得 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\angle BAC}$，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}$，$\therefore \sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由题意，$\dfrac{\pi}{2}<\angle ABC<\pi, \therefore \angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

$\therefore 28=4+BC^2-4BC\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，解得 $BC=4$，

由题意，$\angle DBC=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\angle DBC=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}BD=3\sqrt{3}$，$\therefore BD=3$，

在 $\triangle DBC$ 中，由余弦定理得：$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle DBC=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}=13$，

$\therefore CD=\sqrt{13}$；

综上，$\angle DBC=\frac{\pi}{3}$，$CD=\sqrt{13}$.

19.【答案】(1) 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) 平行，理由见解析.

【解析】

【分析】(1) 由条件列关于 a,b,c 的方程，解方程求 a,b,c。可得椭圆方程；

(2) 根据题意设直线 MN 及 M、N 点坐标，结合题意求点 P 的坐标，结合韦达定理证明 $k_{A_2N}=k_{DP}$ 即可.

【小问 1 详解】

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的半焦距为 c，

由已知点 A_1,A_2 的坐标分别为 $(-a,0),(a,0)$，

因为 $|A_1A_2|=4$，所以 $2a=4$，所以 $a=2$，

又椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $c=\sqrt{3}$，

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

因为直线 MN 与 x 轴不重合，且过点 $D(1,0)$，

所以可设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

联立方程 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去 x 可得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

方程$\left(m^2+4\right)y^2+2my-3=0$的判别式$\Delta=4m^2+12\left(m^2+4\right)>0$，

设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4},y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+4}$，

$\because A_1\left(-2,0\right),A_2\left(2,0\right)$，则$k_{A_1M}=\dfrac{y_1}{x_1+2},k_{A_2N}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$

则直线A_1M的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，

代入$x=\dfrac{5}{2}$可得$y=\dfrac{9y_1}{2\left(x_1+2\right)}$，即$P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9y_1}{2\left(x_1+2\right)}\right)$

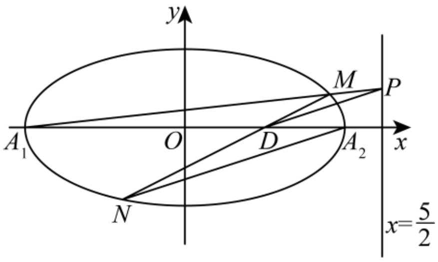
$\therefore k_{DP}=\dfrac{\dfrac{9y_1}{2\left(x_1+2\right)}}{\dfrac{5}{2}-1}=\dfrac{3y_1}{x_1+2}$，

则$k_{A_2N}-k_{DP}=\dfrac{y_2}{x_2-2}-\dfrac{3y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_2}{my_2-1}-\dfrac{3y_1}{my_1+3}=\dfrac{3\left(y_1+y_2\right)-2my_1y_2}{\left(my_1+3\right)\left(my_2-1\right)}$

$\because 3\left(y_1+y_2\right)-2my_1y_2=3\left(-\dfrac{2m}{m^2+4}\right)+\dfrac{6m}{m^2+4}=0$，即$k_{A_2N}-k_{DP}=0$

$\therefore k_{A_2N}=k_{DP}$，

所以直线A_2N与DP平行.



【点睛】关键点点睛：

(1)解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去x(或y)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系.

(2)涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为0或不存在等特殊情形.

20.【答案】（1）0

（2）$\dfrac{1}{e^2-1},\dfrac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）对函数$f(x)$连续求导可知$f'(x)$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递减，结合$f'\left(1\right)=0$可知$f(x)$在$\left[1,+\infty\right)$上

单调递减，从而即可求解.

（2）将原问题转换为$\dfrac{\ln x}{x^2-1}>m$在$\left(1,\mathrm{e}\right)$上恒成立且$\dfrac{\ln x}{x^2-1}<n$在$\left(1,\mathrm{e}\right)$上恒成立，对于前者，直接正常构造函数$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}>m$，利用$\left(\dfrac{\ln x}{x^2-1}\right)_{\min}>m$，而后者则需要将不等式变形为$n\left(x^2-1\right)-\ln x>0$，由此构造函数对$n$进行分类讨论即可.

【小问 1 详解】

对 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2x\ln x$求导得，$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-2\ln x-2=-1+\dfrac{1}{x^2}-2\ln x$，

设$h\left(x\right)=-1+\dfrac{1}{x^2}-2\ln x=f'(x)$，继续对$h\left(x\right)$求导得$h'\left(x\right)=\dfrac{-2}{x^3}-\dfrac{2}{x}$，

注意到当$x\in\left[1,+\infty\right)$时，$h'\left(x\right)=\dfrac{-2}{x^3}-\dfrac{2}{x}<0$，

所以$h\left(x\right)=f'(x)=-1+\dfrac{1}{x^2}-2\ln x$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递减，

又$h\left(1\right)=f'\left(1\right)=0$，

所以当$x\in\left[1,+\infty\right)$时，$f'(x)=-1+\dfrac{1}{x^2}-2\ln x\le f'\left(1\right)=0$，

所以函数$f\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递减，

所以函数$f\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上的最大值为$f\left(1\right)=0$.

【小问 2 详解】

一方面：不妨设$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}>m$在$\left(1,\mathrm{e}\right)$上恒成立，求导得

$$g'\left(x\right)=\frac{\frac{x^2-1}{x}-2x\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2x\ln x}{\left(x^2-1\right)^2},$$

由（1）可知$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2x\ln x<f\left(1\right)=0$在$\left(1,+\infty\right)$上恒成立，

所以$g'\left(x\right)=\dfrac{x-\frac{1}{x}-2x\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}<0$在$\left(1,+\infty\right)$上恒成立，

即函数$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$在$\left(1,+\infty\right)$上严格单调递减，

所以当$x\in\left(1,\mathrm{e}\right)$时，$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}>g\left(\mathrm{e}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2-1}$恒成立，

若不等式$\frac{\ln x}{x^2-1}>m$在$(1,\mathrm{e})$上恒成立，由以上分析可知m的最大值为$g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}^2-1}$.

另一方面： 由题意$\frac{\ln x}{x^2-1}<n$在$(1,\mathrm{e})$上恒成立，将不等式变形为$n(x^2-1)-\ln x>0$，

不妨设$u(x)=n(x^2-1)-\ln x>0$，求导得$u'(x)=2nx-\frac{1}{x}=\frac{2nx^2-1}{x}$，

显然$0<\frac{\ln x}{x^2-1}<n$在$(1,\mathrm{e})$上恒成立，令$u'(x)=0$，得$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}}$，分以下三种情形来讨论，

情形一：当$0<\sqrt{\frac{1}{2n}}\le 1$即$n\ge\frac{1}{2}$时，$u'(x)=\frac{2nx^2-1}{x}>0$在$(1,\mathrm{e})$上恒成立，

所以$u(x)=n(x^2-1)-\ln x$在$(1,\mathrm{e})$上单调递增，

所以此时有$u(x)=n(x^2-1)-\ln x>u(1)=0$，故$n\ge\frac{1}{2}$满足题意，

情形二：当$1<\sqrt{\frac{1}{2n}}<\mathrm{e}$即$\frac{1}{2\mathrm{e}^2}<n<\frac{1}{2}$时，

函数$u'(x),u(x)$随x的变化情况如下表：

x	$\left(1,\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{2n}},\mathrm{e}\right)$
$u'(x)$	$-$	$+$
$u(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

此时$u\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)<u(1)=0$，故$\frac{1}{2\mathrm{e}^2}<n<\frac{1}{2}$不满足题意；

情形三：当$\mathrm{e}\le\sqrt{\frac{1}{2n}}$即$0<n\le\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$时，$u'(x)=\frac{2nx^2-1}{x}<0$在$(1,\mathrm{e})$上恒成立，

所以$u(x)=n(x^2-1)-\ln x$在$(1,\mathrm{e})$上单调递减，

所以此时有$u(x)=n(x^2-1)-\ln x<u(1)=0$，故$0<n\le\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$不满足题意；

结合以上三种情形可知满足题意的n的最小值为$\frac{1}{2}$.

结合以上两方面，综上所述：m的最大值和n的最小值分别为$\frac{1}{\mathrm{e}^2-1},\frac{1}{2}$.

【点睛】关键点点睛：第一问的关键是要连续求导且发现$f'(1)=0$，从而即可顺利求解；至于第（2）问

首先要去将问题转换为两个恒成立问题分别求解，在研究$\frac{\ln x}{x^2-1}>m$时，直接构造函数即可求解，而在研究$\frac{\ln x}{x^2-1}<n$，先要去将不等式变形为$n\left(x^2-1\right)-\ln x>0$，然后对$n$进行分类讨论去分析.

21.【答案】(I) $T=\{1,3\}$，或$T=\{2,4\}$，或$T=\{3,5\}$；(II) 不一定存在，见解析；(III) 11.

【解析】

【分析】(I) 由已知得$t_1-t_2\neq a-b$，其中$a,b\in A$，t_1，t_2相差2，由此可求得T;

(II) 当$A=\{1,2,5,7\}$时，$2-1=1,5-1=4,5-2=3,7-1=6,7-2=5,7-5=2$，则$t_1$，$t_2$相差不可能1，2，3，4，5，6，可得结论.

(III) 因为$C_5^2=10$，故集合A中的元素的差的绝对值至多有10种，可得n的最小值.

【详解】(I) 若$A_1\cap A_2=\varnothing$，则$t_1-t_2\neq a-b$，其中$a,b\in A$，否则$t_1+a=t_2+b$，$A_1\cap A_2\neq\varnothing$，

又$n=5$，$A=\{1,2,5\}$，$2-1=1,5-2=3,5-1=4$，则t_1，t_2相差2，

所以$T=\{1,3\}$，或$T=\{2,4\}$，或$T=\{3,5\}$；

(II) 不一定存在，

当$A=\{1,2,5,7\}$时，$2-1=1,5-1=4,5-2=3,7-1=6,7-2=5,7-5=2$，则$t_1$，$t_2$相差不可能1，2，3，4，5，6，

这与$T=\{t_1, t_2\}\subset\{1,2,3,4,5,6,7\}$矛盾，故不都存在$T$.

(III) 因为$C_5^2=10$，故集合A中的元素的差的绝对值至多有10种，

当$n\geq 12$时，结论都成立；

当$n=11$时，不存在$A\subset S$，$|A|=5$，使得A中任意两个元素差不同，所以当$n=11$时，结论成立；

当$n=10$时，若$A=\{1,3,6,9,10\}$，则不存在T，所以n的最小值为11.

【点睛】关键点睛：本题考查集合的新定义，解决此类问题的关键在于准确理解集合的新定义，紧扣定义解决问题.