海南省 2023—2024 学年高三学业水平诊断(一)

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. **答案** A

命题意图 本题考查交集的概念及运算,解一元二次不等式及对数不等式.

解析 由题意知 $A=(-1,1)$,$B=(0,2]$,所以 $A\cap B=(0,1)$.

2. **答案** B

命题意图 本题考查由存在量词命题求参数范围.

解析 因为 $\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2-3\leqslant a$,且 $(x^2-3)_{\min}=-3$,故 $a\geqslant-3$.

3. **答案** C

命题意图 本题考查函数零点存在定理的应用,函数零点区间的判定.

解析 $\because$ 函数 $f(x)=2^{x-1}+x-3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $f(1)=1+1-3<0$,$f(2)=2+2-3>0$,$\therefore$ 由函数的零点存在定理可知,函数 $f(x)$ 的零点所在的一个区间是 $(1,2)$.

4. **答案** D

命题意图 本题考查对数的实际应用以及对数的运算性质.

解析 由 $-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)=x$,得 $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)=-kx$,所以 $I=I_0e^{-kx}$,代入所给数据得 $I\approx 6\ 600\times\frac{1}{1.65}=4\ 000(\mathrm{lx})$.

5. **答案** B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由图可知,$f(x)$ 的最小正周期为 $4\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)=\pi$,所以 $\omega=\pm1$. 当 $\omega=1$ 时,$2\times\frac{\pi}{6}-\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=\frac{\pi}{3}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,此时 $\sin(\omega\varphi)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;当 $\omega=-1$ 时,$-2\times\frac{\pi}{6}-\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,此时 $\sin(\omega\varphi)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故 $\sin(\omega\varphi)$ 只有一个值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. **答案** D

命题意图 本题考查同角三角函数的化简求值.

解析 $\because\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\therefore(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\frac{1}{4}$,即 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$,$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$,$\therefore\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{3}{8}$,得 $\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{8}$,$\therefore 3\tan^2\alpha-8\tan\alpha+3=0$,$\therefore\tan\alpha=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ 或 $\tan\alpha=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$,$\because\alpha\in(0,\pi)$,且 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 由三角函数定义知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$\therefore 0<\tan\alpha<1$,故 $\tan\alpha=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$.

7. **答案** C

命题意图 本题考查指数函数、对数函数、正弦函数的性质.

解析　$a=\lg 3<\log_9 3=\frac{1}{2}$，$b=\sin 1\approx\sin 57°>\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because 0.5^1<0.5^{0.8}<0.5^{0.5}$，$\therefore \frac{1}{2}<c<\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $a<c<b$.

8. **答案**　B

命题意图　本题考查导数的计算及几何意义.

解析　由题意知 $f'(x)=(x+2)e^x$，因为 PA 与曲线 $y=f(x)$ 相切，所以 $(a+2)e^a=\frac{(a+1)e^a}{a-m}$，整理得 $a^2+(1-m)a-2m-1=0$，同理 $b^2+(1-m)b-2m-1=0$，则 a,b 是方程 $x^2+(1-m)x-2m-1=0$ 的两个实数根，所以 $a+b=m-1=0$，所以 $m=1$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案**　ABC

命题意图　本题考查不等式的性质，以及利用基本不等式求最值问题.

解析　对于 A，B，由条件易知 $0<a<1$，$0<2b<1$，即 $0<b<\frac{1}{2}$，所以 $a+b=1-b>\frac{1}{2}$，$2a+2b=1+a<2$，$a+b<1$，故 A，B 正确；

对于 C，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{4}=8$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，且 $a+2b=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，取"="号，故 C 正确；

对于 D，$2ab=a\cdot 2b\leqslant\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，即 $ab\leqslant\frac{1}{8}$，当且仅当 $a=2b$，且 $a+2b=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，取"="号，故 D 错误.

10. **答案**　AC

命题意图　本题考查三角恒等变换与三角函数的性质.

解析　$f(x)=\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

对于 A，$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；

对于 B，当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}=0$，所以 $x=-\frac{\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 的图象的对称轴，故 B 错误；

对于 C，由 $f(x)=0$，可得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，故 C 正确；

对于 D，由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故 D 错误.

11. **答案**　ACD

命题意图　本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析　对于 A，由正弦定理可知 $a:b:c=8:7:3$，设 $a=8k$，$b=7k$，$c=3k(k>0)$，由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\times 8\times 3}=\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，$A+C=\frac{2\pi}{3}=2B$，故角 A,B,C 构成等差数列，故 A 正确；

对于 B，根据海伦公式得 $p=9k$，$S=\sqrt{9k\times k\times 2k\times 6k}=6\sqrt{3}k^2=12\sqrt{3}$，得 $k=\sqrt{2}$，所以 $a=8\sqrt{2}$，$b=7\sqrt{2}$，$c=$

$3\sqrt{2}$,所以$\triangle ABC$的周长为$18\sqrt{2}$,故B错误;

对于C,设$\triangle ABC$内切圆的半径为r,则$\frac{1}{2}\times 18\sqrt{2}r=12\sqrt{3}$,得$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,所以$\triangle ABC$的内切圆面积为$\pi r^2=\frac{8\pi}{3}$,故C正确;

对于D,设BC的中点为D,则$BD=4\sqrt{2}$,在$\triangle ABD$中,$AD=\sqrt{BD^2+AB^2-AB\times BD}=\sqrt{26}$,故D正确.

12. **答案** BCD

命题意图 本题考查抽象函数的奇偶性、周期性问题.

解析 对于A,由$f(x+2)$为奇函数得$f(-x+2)+f(x+2)=0$,因此$f(2-x)+f(2+x)=0$,所以$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称,故A错误;

对于B,由$f(2x+1)$为偶函数得$f(-2x+1)=f(2x+1)$,于是$f(1-2x)=f(1+2x)$,即$f(1-x)=f(1+x)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,故B正确;

对于C,$f(x+2)=-f(2-x)=-f(1-(1-x))=-f(x)$,从而$f(x+4)=f(x)$,所以$f(x)$以4为周期,$f(7)+f(1)=f(3)+f(1)$,在$f(2-x)+f(2+x)=0$中,令$x=1$,得$f(1)+f(3)=0$,故C正确;

对于D,由前面的分析可得$f(4)+f(0)=0$,$f(2)=f(0)=0$,所以$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,024)=506\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$,故D正确.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案** -1(负奇数均可)

命题意图 本题考查幂函数的性质.

解析 由①知α为奇数,由②知$\alpha<0$,所以α可以取任意负奇数.

14. **答案** $\frac{3}{5}$

命题意图 本题考查二倍角公式的应用.

解析 原式$=\frac{2\sin^2 x\cos x}{2\sin^2 x}=\cos x=\frac{3}{5}$.

15. **答案** $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

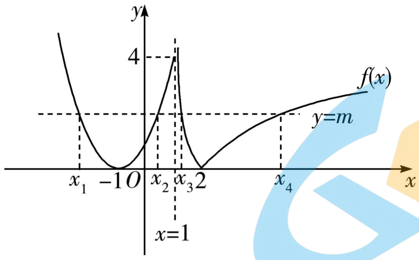
命题意图 本题考查利用导数研究函数单调性.

解析 由题意知$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+\frac{1}{x\ln 2a}=\frac{\ln a+\ln 2a}{x\ln a\ln 2a}$,当$0<a<\frac{1}{2}$时,$\ln a<0$,$\ln 2a<0$,所以$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当$\frac{1}{2}<a<1$时,$\ln a<0$,$\ln 2a>0$,要使$f'(x)>0$,则$\ln a+\ln 2a<0$,整理得$\ln a^2<\ln\frac{1}{2}$,所以$0<a^2<\frac{1}{2}$,解得$\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. **答案** $\left(2,\frac{257}{16}\right]$

命题意图 本题考查分段函数、函数的零点及函数图象交点的综合问题.

解析 由$f(x)$的解析式作出$f(x)$的大致图象,如图所示.



方程 $f(x)=m$ 有 4 个不等实数根等价于 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有 4 个不同的公共点，则 $0<m\leqslant 4$，不妨令 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则由图可知，$x_1+x_2=-2$，$\frac{17}{16}\leqslant x_3<2<x_4\leqslant 17$，所以 $f(x_3)=-\log_2(x_3-1)$，$f(x_4)=\log_2(x_4-1)$，由 $-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$，得 $\frac{1}{x_3-1}=x_4-1$. 所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=-2+x_3+x_4=(x_3-1)+(x_4-1)=\frac{1}{x_4-1}+x_4-1$，设 $t=x_4-1(1<t\leqslant 16)$，则 $g(t)=t+\frac{1}{t}(1<t\leqslant 16)$，易得 $g(t)=t+\frac{1}{t}$ 在区间 $(1,16]$ 上单调递增，所以 $g(t)\in\left(2,\frac{257}{16}\right]$，即 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是 $\left(2,\frac{257}{16}\right]$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列的基本运算和错位相减法求和.

解析 （Ⅰ）由已知得 $S_1=a_1=-1$，$\frac{S_n}{n}=S_1+\frac{n-1}{2}=\frac{n-3}{2}$， ……………………（2 分）

所以 $S_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)^2-\frac{3}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n+2$，② ……………………（3 分）

① - ②，得 $a_n=n-2$， ……………………（4 分）

$a_1=-1$ 也符合该式，

所以 $a_n=n-2$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=n\cdot 3^n$，

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times 3+2\times 3^2+\cdots+n\cdot 3^n$，③ ……………………（6 分）

$3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+n\cdot 3^{n+1}$，④

③ - ④，得 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}$ ……………………（7 分）

$=\frac{3-3^{n+1}}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$

$=\left(\frac{1}{2}-n\right)\cdot 3^{n+1}-\frac{3}{2}$. ……………………（9 分）

故 $T_n=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^{n+1}+\frac{3}{4}$. ……………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查利用频率分布直方图估计平均数、中位数，及古典概型问题.

解析 （Ⅰ）由图可知 $10\times(2a+0.015+0.035+0.030)=1$，

解得 $a=0.010$. ……………………（2 分）

(Ⅱ)平均数为$(20\times0.01+30\times0.015+40\times0.035+50\times0.03+60\times0.01)\times10=41.5$. ……………… (5分)

设中位数为x,由已知可得$x\in[35,45)$, ……………… (6分)

且$10\times0.010+10\times0.015+(x-35)\times0.035=0.5$,

解得$x\approx42.1$,即中位数约为42.1. ……………… (8分)

(Ⅲ)年龄在$[25,35)$和$[55,65]$这两组的人数分别为30,20,

则年龄在$[25,35)$的应抽取3人,年龄在$[55,65]$的应抽取2人, ……………… (10分)

设"从这5人中任选3人,年龄在$[25,35)$内的至少有2人"为事件A,

则$P(A)=\dfrac{C_3^2C_2^1+C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{7}{10}$. ……………… (12分)

19. **命题意图** 本题考查利用正余弦定理及三角形的面积公式解三角形.

解析 (Ⅰ)由条件及正弦定理得$(b+c)(b-c)=(a-\sqrt{2}c)a$, ……………… (2分)

$\therefore a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$, ……………… (3分)

由余弦定理知$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ……………… (5分)

又$B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$. ……………… (6分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{4}ac=1$,

$\therefore ac=2\sqrt{2}$. ……………… (7分)

由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$\therefore 2=a^2+c^2-2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore a^2+c^2=6$. ……………… (9分)

$\therefore (a+c)^2=a^2+c^2+2ac=6+4\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^2$,

$\therefore a+c=2+\sqrt{2}$, ……………… (11分)

$\therefore$ $\triangle ABC$的周长为$a+b+c=2+2\sqrt{2}$. ……………… (12分)

20. **命题意图** 本题考查线面垂直及二面角的向量求法.

解析 (Ⅰ)$\because AC\perp AB$,

且平面$ABC\perp$平面ACC_1A_1,平面$ABC\cap$平面$ACC_1A_1=AC$,

$\therefore AB\perp$平面ACC_1A_1. ……………… (1分)

又$CM\subset$平面ACC_1A_1,$\therefore AB\perp CM$. ……………… (2分)

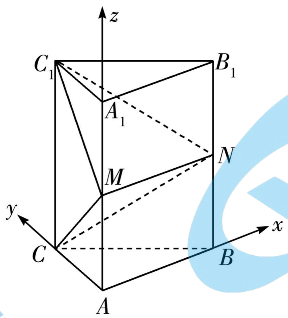
$\because M,N$分别为AA_1,BB_1的中点,$\therefore MN/\!/AB$,$\therefore MN\perp CM$. ……………… (3分)

$\because AM=A_1M=3$,$AC=A_1C_1=3$,$\therefore CM=C_1M=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$,

$\therefore CM^2+C_1M^2=18+18=36=CC_1^2$,$\therefore CM\perp C_1M$, ……………… (4分)

又$\because MN\cap C_1M=M$,$\therefore CM\perp$平面C_1MN. ……………… (5分)

(Ⅱ)$\because AA_1\perp$平面ABC,$AB\perp AC$,$\therefore$以A为原点,分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$的方向为$x$轴、$y$轴、$z$轴的正方向建立空间直角坐标系,如图. ……………… (6分)



$\therefore C(0,3,0), C_1(0,3,6), M(0,0,3), N(4,0,3)$,

$\therefore \overrightarrow{CC_1}=(0,0,6), \overrightarrow{C_1N}=(4,-3,-3), \overrightarrow{CM}=(0,-3,3)$.

设平面 CC_1N 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1N}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}z=0,\\ 4x-3y-3z=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=(3,4,0)$. ……………………………… (8 分)

由(Ⅰ)知 $CM\perp$ 平面 C_1MN,故可取平面 C_1MN 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,-1,1)$. ……………………………… (9 分)

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(0,-1,1)\cdot(3,4,0)}{\sqrt{2}\times 5}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$, ……………………………… (11 分)

$\therefore$ 二面角 $C-C_1N-M$ 的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{-2\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$. ……………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查抛物线、双曲线的性质,直线与抛物线的综合问题.

解析 (Ⅰ)E 的焦点为 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, ……………………………… (1 分)

双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$,不妨取 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$,即 $x-\sqrt{3}y=0$. ……………………………… (3 分)

由点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{\left|\dfrac{p}{2}-0\right|}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}$, ……………………………… (4 分)

得 $p=2$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $E:y^2=4x, F(1,0), l:x=-1$.

设直线 AB 的方程为 $x=my+1$,

联立$\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+1,\end{cases}$消去 x 并整理,得 $y^2-4my-4=0$, ……………………………… (6 分)

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4$, ……………………………… (7 分)

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(1+m^2)$. ……………………………… (8 分)

易得 M 点的坐标为$(2m^2+1,2m)$,$\therefore AB$ 的中垂线方程为 $y-2m=-m(x-2m^2-1)$,

$\therefore P(-1,2m^3+4m)$,

从而$|PM|=\sqrt{(2m^2+2)^2+(-2m^3-2m)^2}=2(1+m^2)\sqrt{1+m^2}$, ……………………………… (10 分)

$\therefore \lambda=\dfrac{|PM|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 实数 λ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查导数的计算，利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=-(x-a)(x-2-a)e^{1-x}$. …………（1 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=a$ 或 $x=2+a$， …………（2 分）

当 $x<a$ 或 $x>a+2$ 时，$f'(x)<0$，当 $a<x<a+2$ 时，$f'(x)>0$， …………（3 分）

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 和 $(a+2,+\infty)$ 上单调递减，在区间 $(a,a+2)$ 上单调递增. …………（4 分）

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，$f(x)=(x^2-2x+1)e^{1-x}=(x-1)^2e^{1-x}$，

$g(x)=2\ln(x-1)-x+1=\ln(x-1)^2+\ln e^{-x}+\ln e=\ln[(x-1)^2e^{1-x}]=\ln f(x)$. …………（6 分）

$h(x)=mf(x)-g(x)=mf(x)-\ln f(x)$.

当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，所以 $h(x)>0$ 恒成立，等价于 $m>\frac{\ln f(x)}{f(x)}$ 恒成立. …………（7 分）

由（Ⅰ）知，$f'(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$，$f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(x)>0$，所以 $0<f(x)\leqslant f(3)$，即 $0<f(x)\leqslant\frac{4}{e^2}$. …………（9 分）

令函数 $q(t)=\frac{\ln t}{t}$，$0<t\leqslant\frac{4}{e^2}$，则 $q'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}>0$，

所以 $q(t)\leqslant q\left(\frac{4}{e^2}\right)=\frac{\ln 4-2}{4e^{-2}}=\frac{(\ln 2-1)e^2}{2}$， …………（11 分）

所以 m 的取值范围是 $\left(\frac{(\ln 2-1)e^2}{2},+\infty\right)$. …………（12 分）