高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}\leqslant 1\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1,0]\cup[1,3]$　　B. $(-1,0)\cup[1,3]$　　C. $(-1,1]$　　D. $[1,3]$

2. “$|a|>|b|$”是“$a>b$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_6=-6$，$a_4a_5=8$，则公差 $d=$

A. 4　　B. 2　　C. -2　　D. 2或-2

4. 若单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_3=2(a_1+a_2)$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$

A. 2　　B. 1　　C. -1或1　　D. -1或2

6. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\ x-y+1\leqslant 0,\\ 4x-y+4\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x-y$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. -2　　D. -4

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_4=-3$，$S_{12}=24$，若 $a_i+a_j=0(i,j\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant i<j)$，则 i 的取值集合是

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4,5\}$　　C. $\{6,7,8\}$　　D. $\{6,7,8,9,10\}$

8. 已知 $a<b$，$c<d$，则下列结论正确的是

A. $ac<bd$　　B. $a-c<b-d$　　C. $ad+bc<ac+bd$　　D. $|a+c|<|b+d|$

9.《九章算术》中的"两鼠穿墙题"是我国数学的古典名题："今有垣厚若干尺，两鼠对穿，大鼠日一尺，小鼠也日一尺，大鼠日自倍，小鼠日自半."题意是：有两只老鼠从墙的两边打洞穿墙，大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半. 如果墙足够厚，第 n 天后大老鼠打洞的总进度是小老鼠的 4 倍，则 n 的值为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

10. 已知正数 a,b，函数 $y=\log_m x+1(m>0$ 且 $m\neq 1)$ 的图象过定点 A，且点 A 在直线 $(a-1)x-(1-b)y+1=0$ 上，则 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为

A. 4　　B. $3\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 9

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且其图象关于点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 对称，则 $f\left(\frac{1}{2\,022}\right)+f\left(\frac{2}{2\,022}\right)+f\left(\frac{3}{2\,022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)=$

A. 4 042　　B. $2\,021\sqrt{3}$　　C. 2 022　　D. 2 021

12. 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-kx^2+1(k\in\mathbf{Z})$，若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 k 的最大值为

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_5=9$，则 $a_3=$________.

14. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$，则 $\tan(\alpha-3\pi)=$________.

15. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+\sqrt{x}$，则不等式 $f(2x)<f(x+3)$ 的解集为________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2\sin\frac{n\pi}{2}+(n+1)^2\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$，前 n 项和为 T_n，则 $T_{22}=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，且对任意正整数 m,n，$a_{m+n}=a_m a_n$ 恒成立.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\frac{n}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.(本小题满分 12 分)

在锐角△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $a^2-c^2=b^2-bc$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a=2\sqrt{3}$,求△ABC 的周长 L 的最大值.

19.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=ax^2+b(4-b)x-3$.

(1)若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(1,3)$,求实数 a,b 的值;

(2)解关于 b 的不等式 $f(1)-ab<0(a\in\mathbf{R})$.

20.(本小题满分 12 分)

面对全球能源、资源危机,环境污染日益严重等一系列难题,世界各国都在积极寻找应对措施,努力开发新能源.对于汽车行业来说,传统的燃油汽车耗能大,污染大,因此发展新能源汽车有着非常积极的作用,这也与我国所提出的环境保护、节能减排理念相一致.我国在积极推进新能源汽车研发生产工作,某大型公司对新推出的新能源汽车市场调研,通过市场分析,全年需投入固定成本 3 000 万元,生产 x 百辆,需另投入成本 $C(x)$万元,且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+200x,0<x<50,\\601x+\dfrac{10\ 000}{x}-9\ 000,x\geqslant 50,\end{cases}$ 由市场调研知,每辆车售价为 6 万元,且全年内生产的车辆当年能全部销售完.

(1)求出年利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(百辆)的函数关系式;

(2)当年产量为多少百辆时,企业所获利润最大?并求出最大利润.

21.（本小题满分 12 分）

设正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，满足$(a_n+1)^2=4S_n+4$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令 $b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$，若数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，证明：$\dfrac{4}{105}\leqslant T_n<\dfrac{1}{15}$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2+x-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)已知点 $P(1,b)$为曲线 $y=f(x)$上一点，若该曲线在点 P 处的切线方程为 $x-y+m=0(b,m\in\mathbf{R})$，求 a,b,m 的值；

(2)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(3)若 $f(x)$在区间$(0,3)$上有唯一的极值点 x_0，求 a 的取值范围.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

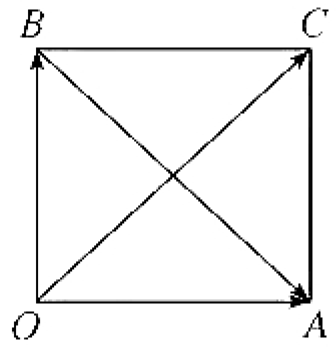
1. B　由题意知 $B=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$，所以 $A\cap B=(-1,0)\cup[1,3]$. 故选 B.

2. D　显然 $|-2|>|1|$，但 $-2>1$ 不成立，故充分性不成立；$0>-1$，但 $|0|>|-1|$ 不成立，所以必要性不成立. 故选 D.

3. B　由题意知 $d>0$，法一：因为 $a_3+a_6=-6$，所以 $a_4+a_5=-6$. 又 $a_4a_5=8$，所以 $\begin{cases}a_4=-4,\\a_5=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=-2,\\a_5=-4,\end{cases}$ 所以 $d=2$ 或 $d=-2$(舍). 故选 B.

法二：由已知，得 $\begin{cases}2a_1+7d=-6, & ①\\(a_1+3d)(a_1+4d)=8, & ②\end{cases}$ 由①，得 $a_1=-3-\frac{7}{2}d$，代入②得 $\left(-3-\frac{d}{2}\right)\left(-3+\frac{d}{2}\right)=8$，解得 $d=2$ 或 $d=-2$(舍). 故选 B.

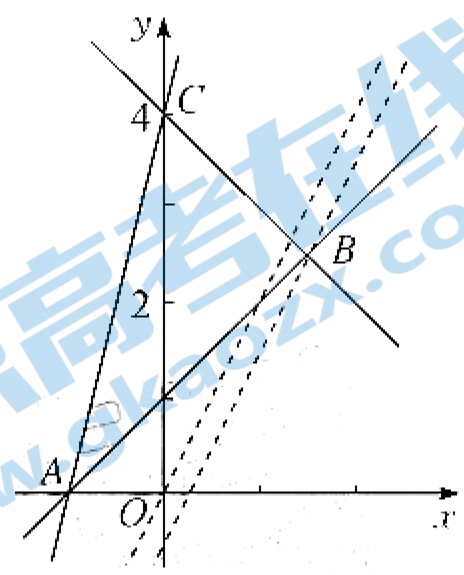
4. C　法一：因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{2}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.



法二：作▱OACB，使 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以▱OACB 为正方形，所以 $\angle COA=\frac{\pi}{4}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. 故选 C.

5. D　法一：由题意知 $a_2+a_3=a_1q+a_2q=q(a_1+a_2)=2(a_1+a_2)$，若 $a_1+a_2\neq0$，则 $q=2$；若 $a_1+a_2=0$，则 $a_2=-a_1$，所以 $q=-1$，所以 $q=-1$ 或 $q=2$. 故选 D.

法二：由题意知 $a_1(q+q^2)-2a_1(1+q)=0$，所以 $(1+q)(q-2)=0$，所以 $q=-1$ 或 $q=2$. 故选 D.



6. A　画出可行域(如图阴影部分所示)，当直线 $2x-y-z=0$ 过点 B 时，z 取得最大值，易求得点 B 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$，所以 $z_{\max}=2\times\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

7. B　设公差为 d，由 $a_1+3d=-3$ 及 $12a_1+\frac{12\times11}{2}d=24$，解得 $a_1=-9$，$d=2$，所以数列为 -9，-7，-5，-3，-1，1，3，5，7，9，11，…，故 i 取值的集合为 $\{1,2,3,4,5\}$. 故选 B.

8. C　若 $a=-2$，$b=-1$，$c=1$，$d=2$，则 $ac=bd=-2$，$a-c=b-d=-3$，$|a+c|=|b+d|=1$，所以 A，B，D 均错误；对于 C，因为 $c<d$，所以 $d-c>0$，又因为 $a<b$，所以 $a(d-c)<b(d-c)$，所以 $ad-ac<bd-bc$，即 $ad+bc<ac+bd$，故 C 正确. 故选 C.

9. C　大老鼠每天打洞的长度构成等比数列，设为 $\{a_n\}$，则 $a_1=1$，$q=2$，所以其前 n 项和 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. 小老鼠每天打洞的长度也构成等比数列，设为 $\{b_n\}$，则 $b_1=1$，$q=\frac{1}{2}$，所以其前 n 项和 $T_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. 由题意知 $S_n=4T_n$，即 $2^n-1=8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，化简得 $(2^n)^2-9\times2^n+8=0$，所以 $2^n=8$ 或 $2^n=1$，所以 $n=3$ 或 $n=0$(舍). 故选 C.

10. D　由题意知 $A(1,1)$，代入直线的方程得 $a+b=1$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$(当且仅当 $a=2b$ 时等号成立)，所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 9. 故选 D.

11. D　由题意，得 $f(x)+f(1-x)=2$，令 $S=f\left(\frac{1}{2\ 022}\right)+f\left(\frac{2}{2\ 022}\right)+f\left(\frac{3}{2\ 022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\ 021}{2\ 022}\right)$，利用倒序相加法得 $2S=2\ 021\times2$，所以 $S=2\ 021$. 故选 D.

12. A　$f'(x)=x(e^x-2k)$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^x\geq1$，①当 $k\leq\frac{1}{2}$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$f'(x)\geq0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{min}=f(0)=0\geq0$，$f(x)\geq0$ 成立；②当 $k>\frac{1}{2}$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$k\geq1$，$\ln 2k>0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln 2k$；令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln 2k$，故 $f(x)$ 在 $[0,\ln 2k)$ 上单调递减，在 $(\ln 2k,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{min}=f(\ln 2k)=-k[(\ln 2k-1)^2+1]+1<0$，故 $k>\frac{1}{2}$ 不合题意. 综上 $k\leq\frac{1}{2}$，又 $k\in\mathbf{Z}$，所以 k 的最大值为 0. 故选 A.

13. 3　$a_5=a_1q^4=q^4=9$，所以 $q^2=3$，所以 $a_3=a_1q^2=3$.

14. $2\sqrt{2}$　由题意得 $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\tan(\alpha-3\pi)=\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$.

15. $(-1,3)$　当 $x\geq0$ 时，$f(x)=x^2+\sqrt{x}$ 单调递增，又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(2x)<f(x+3)$，等价于 $|2x|<|x+3|$，解得 $-1<x<3$，故所求不等式的解集为 $(-1,3)$.

16. -48　因为 $a_n=n^2\sin\frac{n\pi}{2}+(n+1)^2\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$，

所以 $T_{22}=1^2-3^2-3^2+5^2+5^2-7^2-7^2+9^2+9^2-11^2-11^2+13^2+\cdots-19^2+21^2+21^2-23^2$

$=(1^2-3^2)-(3^2-5^2)+(5^2-7^2)-(7^2-9^2)+(9^2-11^2)-(11^2-13^2)+\cdots-(19^2-21^2)+(21^2-23^2)$

$=-2\times4+2\times8-2\times12+2\times16-2\times20+\cdots+2\times40-2\times44$

$=-2\times4+2\times(8-12)+2\times(16-20)+\cdots+2\times(40-44)=-8-8\times5=-48$.

17. 解：(1)因为对任意正整数 m,n，$a_{m+n}=a_ma_n$ 恒成立，

所以 $m=1$ 时，有 $a_{n+1}=a_1a_n$ 对任意正整数 n 恒成立，……1 分

又 $a_1=2$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，……2 分

即 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，……3 分

所以 $a_n=2^n$. ……4 分

(2)由(1)知 $a_n=2^n$，所以 $b_n=\frac{n}{2^n}$，……5 分

所以 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$，……6 分

两边乘以 $\frac{1}{2}$，得

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，……7 分

两式相减，得

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$……8 分

$=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，……9 分

所以 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. ……10 分

18. 解：(1)由 $a^2-c^2=b^2-bc$，得 $b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$. ……2 分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……4 分

(2)法一：由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$，又 $a=2\sqrt{3}$，所以由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$，

所以 $b=4\sin B, c=4\sin C$， ………………………………………………………………………… 6 分

所以 $L=4(\sin B+\sin C)+2\sqrt{3}=4\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]+2\sqrt{3}=4\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+2\sqrt{3}$ ………… 7 分

$=4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}$. ……………………………… 8 分

因为 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$， ………………………………………… 10 分

所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

所以当 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，L 取得最大值，其最大值为 $6\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

(2)法二：由 $a^2-c^2=b^2-bc$，$a=2\sqrt{3}$ 得 $12=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geqslant(b+c)^2-3\times\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{(b+c)^2}{4}$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，此时 $b=c=2\sqrt{3}=a$. ……………………………………………………………… 8 分

所以 $(b+c)^2\leqslant 48$，即 $b+c\leqslant 4\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

所以 $L=a+b+c\leqslant 6\sqrt{3}$（$b=c=a=2\sqrt{3}$ 时取等号），L 的最大值为 $6\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $ax^2+b(4-b)x-3>0$ 的解集为 $(1,3)$，

所以 1，3 是方程 $ax^2+b(4-b)x-3=0$ 的两根，且 $a<0$. ………………………………………… 2 分

所以 $\begin{cases}1+3=-\frac{b(4-b)}{a},\\1\times3=\frac{-3}{a},\\a<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$ …………………………………………………… 4 分

(2)由题意知 $f(1)-ab=a+b(4-b)-3-ab<0$，

所以 $b^2+(a-4)b+3-a>0$，

方程 $b^2+(a-4)b+3-a=0$ 的两根分别为 $1, 3-a$， ………………………………………………… 6 分

①当 $1=3-a$，即 $a=2$ 时，不等式的解为 $b\neq 1$，故 $f(1)-ab<0$ 的解集为 $\{b|b\neq 1\}$； ………………… 8 分

②当 $1>3-a$，即 $a>2$ 时，不等式的解为 $b<3-a$ 或 $b>1$，故 $f(1)-ab<0$ 的解集为 $\{b|b<3-a$，或 $b>1\}$；…… 10 分

③当 $1<3-a$，即 $a<2$ 时，不等式的解为 $b<1$ 或 $b>3-a$，故 $f(1)-ab<0$ 的解集为 $\{b|b<1$，或 $b>3-a\}$. …… 12 分

20. 解：(1)当 $0<x<50$ 时，$L(x)=6\times100x-10x^2-200x-3\,000=-10x^2+400x-3\,000$， ……………… 2 分

当 $x\geqslant 50$ 时，$L(x)=6\times100x-601x-\frac{10\,000}{x}+9\,000-3\,000=6\,000-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)$. ………………… 4 分

综上所述，$L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\,000, 0<x<50,\\6\,000-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right), x\geqslant 50.\end{cases}$ …………………………………………………… 6 分

(2)当 $0<x<50$ 时，$L(x)=-10(x-20)^2+1\,000$， ………………………………………………………… 7 分

所以当 $x=20$ 时，$L(x)_{\max}=L(20)=1\,000$；

当 $x\geqslant 50$ 时，$L(x)=6\,000-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)$，$L'(x)=-1+\frac{10\,000}{x^2}=\frac{10\,000-x^2}{x^2}$，

当 $x\in(50,100)$ 时，$L'(x)>0$，当 $x\in(100,+\infty)$ 时，$L'(x)<0$，

所以 $L(x)$ 在 $(50,100)$ 上单调递增，在 $(100,+\infty)$ 上单调递减；

所以当 $x=100$ 时，$L(x)_{\max}=L(100)=5\ 800>1\ 000$. ………………………………………… 10 分

所以当 $x=100$，即当年产量为 100 百辆时，该企业所获利润最大，且最大利润为 5 800 万元. ………………… 12 分

21.（1）解：由题意得 $a_n^2+2a_n=4S_n+3$，

当 $n=1$ 时，$a_1^2+2a_1=4a_1+3$，解得 $a_1=3$ 或 $a_1=-1$，………………………………………… 2 分

因为 $a_n>0$，所以 $a_1=3$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，$a_{n-1}^2+2a_{n-1}=4S_{n-1}+3$，

两式相减，得 $a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}=4S_n+3-4S_{n-1}-3$，

整理得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，………………………………………… 4 分

因为 $a_n>0$，所以 $a_n+a_{n-1}>0$，$a_n-a_{n-1}-2=0$，$a_n-a_{n-1}=2$，

故数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，所以 $a_n=2n+1$. ………………………………………… 6 分

（2）证明：因为 $a_n=2n+1$，所以 $b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}$，… 8 分

则 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\left(\dfrac{1}{3\times5}-\dfrac{1}{5\times7}\right)+\left(\dfrac{1}{5\times7}-\dfrac{1}{7\times9}\right)+\left(\dfrac{1}{7\times9}-\dfrac{1}{9\times11}\right)+\cdots+\left[\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right]$

$=\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}$，………………………………………… 10 分

因为 $\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}>0$，所以 $T_n<\dfrac{1}{15}$，………………………………………… 11 分

又 $b_n>0$，所以 $\{T_n\}$ 单调递增，

所以 $T_n\geqslant T_1=\dfrac{4}{105}$，

所以 $\dfrac{4}{105}\leqslant T_n<\dfrac{1}{15}$. ………………………………………… 12 分

22. 解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-ax+1=-\dfrac{ax^2-x-1}{x}$，………………………………………… 1 分

由题意知 $f'(1)=-a+2=1$，所以 $a=1$，………………………………………… 2 分

所以 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+x-1$，所以 $f(1)=-\dfrac{1}{2}+1-1=b$，所以 $b=-\dfrac{1}{2}$，………………………… 3 分

将点 $\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$ 代入方程 $x-y+m=0$，得 $m=-\dfrac{3}{2}$，所以 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$m=-\dfrac{3}{2}$. ………………… 4 分

（2）由题意知函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\dfrac{ax^2-x-1}{x}$，

当 $a\leqslant 0$，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；………………………… 5 分

当 $a>0$ 时，因为方程 $ax^2-x-1=0$ 的判别式 $\Delta=1+4a>0$，该方程的两根分别为 $\dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2a}$，$\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}$，… 6 分

令 $f'(x)=-\dfrac{ax^2-x-1}{x}>0$，得 $0<x<\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}$，令 $f'(x)=-\dfrac{ax^2-x-1}{x}<0$，得 $x>\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}$，………… 7 分

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减. ………………………… 8 分

（3）由（1）知 $f'(x)=\dfrac{-ax^2+x+1}{x}$，令 $g(x)=-ax^2+x+1$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 上有唯一的极值点 x_0，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,3)$ 上存在唯一零点，即 $g(x)$ 在 $(0,3)$ 上存在唯一零点，且在该零点两侧 $g(x)$ 的符号不一致. …… 9 分

当 $a\leqslant 0$ 时，由（2）知，$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增，$f(x)$ 无极值点，………………………………… 10 分

当 $a>0$，因为 $g(0)=1>0$，$g(x)$ 的对称轴为直线 $x=\dfrac{1}{2a}>0$，$f'(x)$ 在 $(0,3)$ 上存在唯一零点，必有 $g(3)=-9a+4<0$，解得 $a>\dfrac{4}{9}$，所以 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{4}{9},+\infty\right)$. ………………………………………… 12 分