中学生标准学术能力测试诊断性测试2019年11月测试

数学答案

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	A	D	D	C	A	B	D

二、多项选择题：本大题共2小题，每小题5分，共10分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分.

11	12
CD	ABC

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．-8

14．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

15．$(-\infty,7]$

16．$\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

四、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，由题意，得

$a_5+a_6=6a_4\Rightarrow q+q^2=6$ 解得$q=2$ 或$q=-3$（舍）

又$a_3=4\Rightarrow a_1=1$ 所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$ ……………………2分

$b_n=\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1}=n-1+n=2n-1$ ……………………4分

（2）$S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$. ……………………6分

$\therefore c_n=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ ……………………8分

$\therefore T_n=2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$ ……………………10分

18．解：$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$ ……………………2分

（1）令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$）得

$$2k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\quad (k\in Z)$$

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$（$k\in Z$） ……………………5 分

（2）由 $f(B)=\sqrt{3}$，得 $\sin(B-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$B-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $B-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore B=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 或 $B=2k\pi+\pi,k\in Z$，

$\because B$ 是三角形的内角，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$． ……………………7 分

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore a^2+c^2+ac=9$

$\therefore 2ac+ac\le 9$，即 $ac\le 3$ ……………………9 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$． ……………………11 分

当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$ 时，ΔABC 面积的最大值是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$． ……………………12 分

19．（1）取 PC 的中点 F，连接 DF，EF，

$\because$ E 是 PB 的中点，

$\therefore$ $EF//BC$，且 $BC=2EF$，

又 $AD//BC$，$BC=2AD$

$\therefore$ $AD//EF$ 且 $AD=EF$， ……………………2 分

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形，

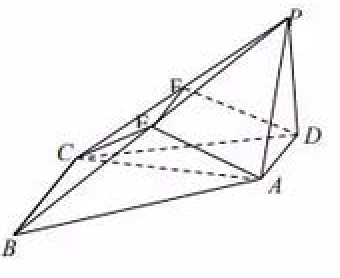
$\therefore$ $AE//DF$，又 $DF\subset$ 平面 PDC，$AE\not\subset$ 平面 PCD， ……………………4 分

$\therefore$ $AE//$ 平面 PDC． ……………………5 分

（2）若 $PD=DC$，则 $\triangle PDC$ 是等腰三角形，

$\therefore$ $DF\perp PC$，

又 $AE//DF$，$\therefore$ $AE\perp PC$



$\because$ $PD\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$

$\therefore$ $PD\perp BC$，

又 $BC\perp CD, CD\cap PD=D$

$\therefore$ $BC\perp$平面PDC， ……………………………………7 分

$\because$ $DF\subset$平面PDC

$\therefore$ $BC\perp DF$

$\therefore$ $BC\perp AE$

又 $AE\perp PC$ ，$PC\cap BC=C$

$\therefore$ $AE\perp$平面PBC， ……………………………………9 分

连接EC，AC，则$\angle ACE$ 就是直线AC与平面PBC所成的角． ……………………………10 分

设$PD=CD=BC=2$，

在$Rt\triangle PCB$中，求得$PC=2\sqrt{2}$ ，$PB=2\sqrt{3}$ ，$EC=\sqrt{3}$，

在$Rt\triangle ADC$中，求得$AC=\sqrt{5}$，

$\therefore$ 在$Rt\triangle AEC$中，$\cos\angle ECA=\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ． ……………………………………12 分

20.（1）设事件A_i 为“甲盒中取出i个红球”，事件B_j为“乙盒中取出j个红球”

则$P(A_i)=\dfrac{C_2^iC_3^{2-i}}{C_5^2}, P(B_j)=\dfrac{C_3^jC_3^{2-j}}{C_6^2}$

设事件C为“4个球中恰有1个红球”

$\therefore P(C)=P(A_0B_1)+P(A_1B_0)=\dfrac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{9}{15}+\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{3}{15}=\dfrac{3}{10}$ …
……………………………………3 分

（2）ξ可取的值为$0,1,2,3,4$

$\therefore P(\xi=0)=P(A_0B_0)=\dfrac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{50}$ ……5 分

$P(\xi=1)=P(C)=\dfrac{3}{10}$

$P(\xi=2)=P(A_0B_2)+P(A_1B_1)+P(A_2B_0)=\dfrac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}+\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\dfrac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{11}{25}$
……………………………………7 分

$P(\xi=3)=P(A_1B_2)+P(A_2B_1)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}+\dfrac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{9}{50}$ ······················9 分

$\therefore P(\xi=4)=P(A_2B_2)=\dfrac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{1}{50}$ ··································10 分

$\therefore\xi$ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{3}{50}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{11}{25}$	$\dfrac{9}{50}$	$\dfrac{1}{50}$

$\therefore E\xi=0\times\dfrac{3}{50}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{11}{25}+3\times\dfrac{9}{50}+4\times\dfrac{1}{50}=\dfrac{9}{5}$ ·································12 分

21.（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2},y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$， ······1 分

$\therefore\ k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_0}$ ， ·······························3 分

而 $k_{MP}=\dfrac{y_0}{x_0-4}$， ·································4 分

由 $k\cdot k_{MP}=-1$ 得 $x_0-4=-2$ ，即 $x_0=2$． ·····························5 分

（2）设直线 $AB:x=m(y-y_0)+2$ 即 $AB:x=my-my_0+2$ ，

与抛物线 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my+4my_0-8=0$ ，

$\because\triangle=16m^2-4(4my_0-8)>0,\therefore m^2<2$

则 $y_1+y_2=4m,y_1y_2=4my_0-8$， ·································7 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16m^2-16my_0+32}$ ，

而 P 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|my_0+2|}{\sqrt{m^2+1}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}d\,|AB|=2|my_0+2|\sqrt{m^2-my_0+2}$ ·····························9 分

又由于 $m=\dfrac{1}{k}=\dfrac{y_0}{2}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=2(2m^2+2)\sqrt{2-m^2}=4(m^2+1)\sqrt{2-m^2}$ （$m^2<2$）， ···················10 分

令$\sqrt{2-m^2}=t$，则$t>0$且$m^2=2-t^2$，

所以$S_{\Delta PAB}=4(3-t^2)t=12t-4t^3$ ，

令$g(t)=12t-4t^3(t>0)$ ，

则$g'(t)=12-12t^2=12(1-t)(1+t)$，

当$0<t<1$ ，$g'(t)>0$ ，当$t>1$时，$g'(t)<0$，

故$g(t)=12t-4t^3\le g(1)=8$，即ΔPAB面积的最大值为8. ……………………………12分

22.（1）解：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0,\therefore x=e$

当$f'(x)>0$时,$0<x<e,\therefore f(x)$在$(0,e)$上单调递增 ，

当$f'(x)<0$时，$x>e,\therefore f(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减.

$\therefore f(x)_{极大值}=f(e)=\dfrac{1}{e}-a$ ……………………………3分

$\because f(x)$有且只有两个零点,$\therefore 0<a<\dfrac{1}{e}$，又$x>0$且$x\to 0$时$f(x)<0$，

$x\to+\infty$时，若$a=0$时，$f(x)>0$不符合题意，若$a<0$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a>0$不符合，

若$a>0$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$满足，

综上，若使$f(x)$有且只有两个零点，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{e}$ ……………………… 4分

（2）证法一：

$\because f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a=0,\therefore \ln x=ax,\therefore \ln x=a\cdot e^{\ln x}$，$\therefore \ln x_1,\ln x_2$是$xe^{-x}=a$的两根

设$t_1=\ln x_1,t_2=\ln x_2,g(t)=t\cdot e^{-t},g'(t)=(1-t)e^{-t}$，

$\therefore g(t)$在$(-\infty,1]$上单调递增，在$[1,+\infty)$上单调递减 ……………………………6分

$\because g(t_1)=g(t_2)$,设$t_1<t_2$,则必有$0<t_1<1<t_2$,

构造函数$G(t)=g(1+t)-g(1-t),t\in(0,1)$，

$\because G'(t)=g'(1+t)+g'(1-t)=\dfrac{t}{e^{t+1}}(e^{2t}-1)>0$,

$\therefore G(t)$在$t\in(0,1)$上单调递增,$\therefore G(t)>G(0)=0$, ……………………………9分

$\therefore g(2-t_1)>g(t_1)=g(t_2)$,

又$\because 2-t_1,t_2\in(1,+\infty),g(t)$在$t\in(1,+\infty)$上单调递减,

$\therefore 2\text{-}t_1<t_2,\therefore t_1+t_2>2$,

$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2$，即$x_1\cdot x_2>e^2$；$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1\cdot x_2}>e$，即$x_1+x_2>2e$. ……12 分

证法二：

不妨设$1<x_1<e<x_2$，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore \dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，即$\therefore \dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}$， ……………………………………6 分

设$x_2=tx_1(t>1)$，$\therefore t=\dfrac{\ln tx_1}{\ln x_1}=\dfrac{\ln t+\ln x_1}{\ln x_1}$，$\therefore \ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$，

$\because \ln x_2=\ln(tx_1)=\ln t+\ln x_1=\ln t+\dfrac{\ln t}{t-1}=\dfrac{t\ln t}{t-1}$，$\therefore \ln x_1+\ln x_2=\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t$，

$\because \dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1\cdot x_2}$，要证$x_1+x_2>2e$，只需证$x_1\cdot x_2>e^2$，

即证$\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t>2$，即证$\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$. ……………………………9 分

设$g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$(t>1)$，

$\because g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore g(t)$在$(1,+\infty)$单调递增.

$\because g(1)=0$，$\therefore g(t)>g(1)=0$，

$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2$，$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1\cdot x_2}>e$，即$x_1+x_2>2e$. ……………………………12 分

证法三：

不妨设$1<x_1<e<x_2$，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore \dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$， ……………………………………6 分

要证$x_1+x_2>2e$，只需证$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\dfrac{x_1}{\ln x_1}>e$， ……………………………7 分

变形，得：$\ln x_2-\ln x_1>\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}$，即$\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2(\dfrac{x_2}{x_1}-1)}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}$．

设$t=\dfrac{x_2}{x_1}\therefore \ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$ ，设$g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$，……………………10 分

$\because g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore g(t)$在（$1,+\infty$）上单调递增，

$\therefore g(t)>g(1)=0$，$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_1}{\ln x_1}=e$成立，$\therefore x_1+x_2>2e$．……………………12 分