高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{-2,0,1\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-2,0,1\}$　　C. $\{-2,0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知 i 是虚数单位，则 $\frac{12i+1}{4i}=$

A. $\frac{1}{3}+4i$　　B. $\frac{1}{3}-4i$　　C. $3+\frac{1}{4}i$　　D. $3-\frac{1}{4}i$

3. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则“$a<b$”是“$ac^2<bc^2$”的

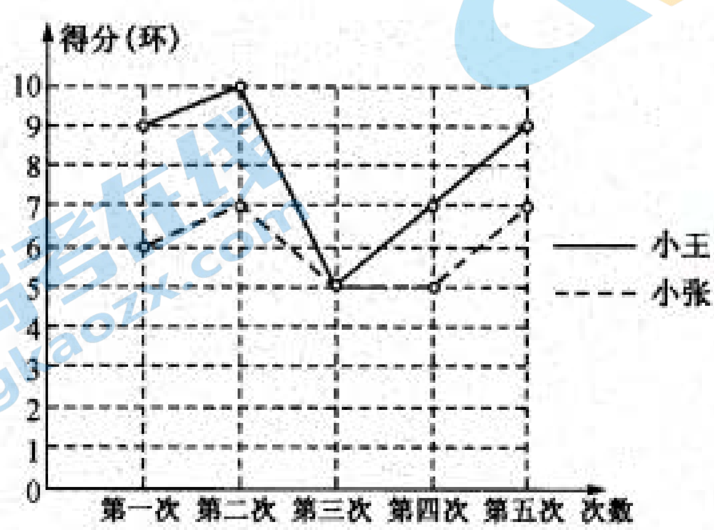
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $a=2^{0.1}$，$b=\log_{0.2}0.3$，$c=\ln 0.9$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>b>a$

5. 小王与小张二人参加某射击比赛，二人选拔赛五次测试的得分情况如图所示. 设小王与小张这五次射击得分的平均数分别为$\overline{x_A}$和$\overline{x_B}$，方差分别为 s_A^2 和 s_B^2，则

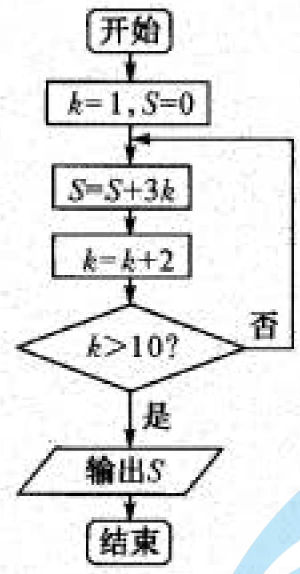


A. $\overline{x_A}<\overline{x_B}, s_A^2>s_B^2$　　B. $\overline{x_A}<\overline{x_B}, s_A^2<s_B^2$　　C. $\overline{x_A}>\overline{x_B}, s_A^2>s_B^2$　　D. $\overline{x_A}>\overline{x_B}, s_A^2<s_B^2$

6. 已知直线 l 过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点且与 C 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点关于直线 $x=1$ 的对称点在 C 的准线上，则 $|AB|=$

A. 12　　B. 8　　C. 4　　D. 2

7. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值是

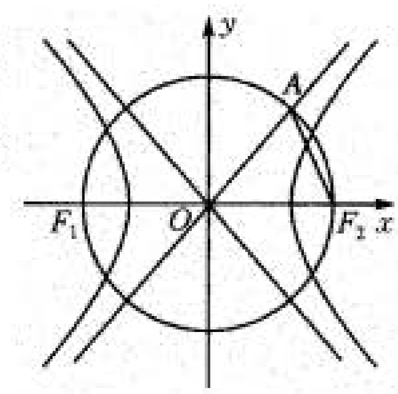


A. 27　　B. 48　　C. 75　　D. 108

8. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $c=2b$，$\sin^2A-3\sin^2B=\frac{1}{2}\sin A\sin C$，则角 $C=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

9. 设 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，以线段 F_1F_2 为直径的圆与直线 $bx-ay=0$ 在第一象限交于点 A，若 $\tan\angle AF_2O=2$，则双曲线 C 的离心率为



A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

10. 已知函数 $f(x)=\log_2(1+4^x)-x$，则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数　　B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

C. 函数 $f(x)$ 是奇函数　　D. 函数 $f(x)$ 是偶函数

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $16\sqrt{2}$，点 P 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 A_1,C 到 P 的距离分别为 $2,2\sqrt{3}$，则直线 CP 与平面 BDD_1B_1 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

12. 设函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|$，则下列结论错误的是

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$

D. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,-4)$，且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则 $m=$________.

14. 函数 $f(x)=(x-3)e^x$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为____________.

15. 在区间 $[-8,4]$ 上任取一个数 x，则事件“$\sin\frac{\pi x}{4}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$”发生的概率为________.

16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $32\sqrt{5}$，$AA_1=2\sqrt{5}$，则当长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积最小时，该长方体外接球的体积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

18.（本小题满分 12 分）

机动车行经人行横道时，应当减速慢行；遇行人正在通过人行横道，应当停车让行，俗称“礼让行人”．下表是某市一主干道路口监控设备所抓拍的 5 个月内驾驶员不“礼让行人”行为统计数据：

月份	1	2	3	4	5
违章驾驶人次	120	105	100	95	80

(1)由表中看出，可用线性回归模型拟合违章人次y与月份x之间的关系，求y关于x的回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测该路口 9 月份不“礼让行人”的违章驾驶人次；

(2)交警从这 5 个月内通过该路口的驾驶员中随机抽查 70 人，调查驾驶员不“礼让行人”行为与驾龄的关系，得到下表：

	不礼让行人	礼让行人
驾龄不超过 1 年	24	16
驾龄 1 年以上	16	14

能否据此判断有 90%的把握认为“礼让行人”行为与驾龄有关？

附：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$，$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中$n=a+b+c+d$）.

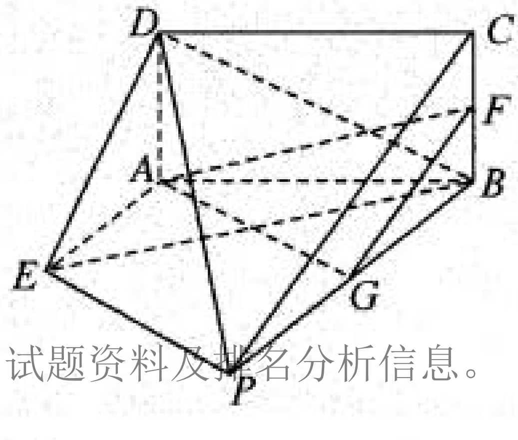
$P(K^2>k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19.（本小题满分 12 分）

如图，已知矩形$ABCD$所在平面垂直于直角梯形$ABPE$所在平面，$EP=\sqrt{3}$，$BP=2$，$AD=AE=1$，$AE\perp EP$，$AE/\!/BP$，F，G分别是BC，BP的中点. 微信搜《试卷答案公众号》

(1)设过三点P，E，C的平面为α，求证：平面$AFG/\!/$平面α；

(2)求四棱锥$D-ABPE$与三棱锥$P-BCD$的体积之比.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，焦距为 2，实轴长为 4.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设过点 F_1 不与 x 轴重合的直线 l 与椭圆 C 相交于 E,D 两点，试问在 x 轴上是否存在一个点 M，使得直线 ME,MD 的斜率之积恒为定值？若存在，求出该定值及点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=1-a\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right|(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(2)当 $a<0$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1-t,\\y=2t\end{cases}$（$t$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\sin\theta-3=0$.

(1)求圆 C 的直角坐标方程及直线 l 的普通方程；

(2)直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，与 x 轴交于点 M，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4-5：不等式选讲**

设 $f(x)=|x-2|+|x+3|$.

(1)解不等式 $f(x)>7$；

(2)若关于实数 x 的不等式 $f(x)<a-1$ 无解，求实数 a 的取值范围.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　$A\cup B=\{-2,0,1,2\}$. 故选 C.

2. D　$\frac{12i+1}{4i}=\frac{(12i+1)i}{4i^2}=\frac{-12+i}{-4}=3-\frac{1}{4}i$. 故选 D.

3. B　当 $c^2=0$ 时，由 $a<b$ 推不出 $ac^2<bc^2$；由 $ac^2<bc^2$，可以推出 $a<b$，所以"$a<b$"是"$ac^2<bc^2$"的必要不充分条件. 故选 B.

4. A　$a=2^{0.1}>2^0=1$，$\log_{0.2}1<\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2$，即 $0<b<1$，$c=\ln 0.9<\ln 1=0$，所以 $a>b>c$. 故选 A.

5. C　观察图象可知，实线中的数据除第三次的与虚线中对应相等外，其余都比虚线中的大，所以这五次射击小王得分的平均数大于小张得分的平均数，即 $\overline{x_A}>\overline{x_B}$. 显然实线中的数据波动幅度比虚线中的数据波动幅度大，所以这五次射击小王得分的方差大于小张得分的方差，即 $s_A^2>s_B^2$. 故选 C.

6. B　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为线段 AB 的中点关于直线 $x=1$ 的对称点在 C 的准线上，所以线段 AB 的中点的横坐标为 3，所以 $x_1+x_2=6$，所以 $|AB|=x_1+1+x_2+1=8$. 故选 B.

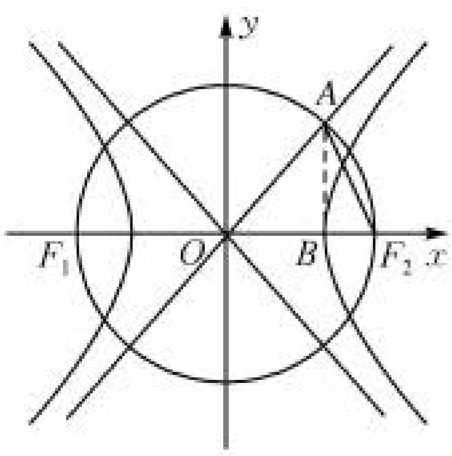
7. C　第一次运行时，$S=0+3\times1=3$，$k=3$；第二次运行时，$S=3+3\times3=12$，$k=5$；

第三次运行时，$S=12+3\times5=27$，$k=7$；第四次运行时，$S=27+3\times7=48$，$k=9$；

第五次运行时，$S=48+3\times9=75$，$k=11$，此时刚好满足 $k>10$，故输出 $S=75$. 故选 C.

8. B　因为 $\sin^2A-3\sin^2B=\frac{1}{2}\sin A\sin C$，由正弦定理得 $a^2-3b^2=\frac{1}{2}ac$. 由余弦定理的推论，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(2b)^2}{a\cdot 2b}=\frac{a^2-3b^2}{ac}=\frac{\frac{1}{2}ac}{ac}=\frac{1}{2}$. 又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

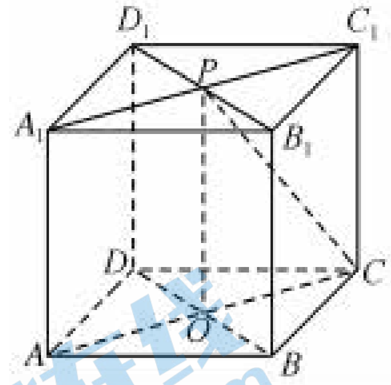
9. A　方法一：设双曲线 C 的右顶点为 B，半焦距为 c，连接 AB，因为 $|OA|=c$，$|OB|=a$，$\tan\angle AOB=\frac{b}{a}$，易求 $|AB|=b$，所以 $AB\perp OF_2$，所以 $\tan\angle AF_2O=\frac{|AB|}{|BF_2|}=\frac{b}{c-a}=2$，所以 $b=2(c-a)$，所以 $b^2=4(c-a)^2$，即 $3c^2-8ac+5a^2=0$，所以 $3e^2-8e+5=0$，解得 $e=\frac{5}{3}$ 或 $e=1$(舍). 故选 A.



方法二：因为 $|OA|=|OF_2|=c$，所以 $\angle OAF_2=\angle AF_2O$，$\angle AOF_2=\pi-2\angle AF_2O$，所以 $\tan\angle AOF_2=-\tan 2\angle AF_2O=-\frac{2\tan\angle AF_2O}{1-\tan^2\angle AF_2O}=\frac{4}{3}$，即 $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}$. 故选 A.

10. D　$f(x)=\log_2(1+4^x)-x=\log_2(1+4^x)-\log_2 2^x=\log_2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$，因为 $2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant2$(当且仅当 $x=0$ 时取等号)，所以 $f(x)\geqslant1$，故 B 错误；同时也看出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上不是增函数，故 A 错误；$f(-x)=\log_2\left(2^{-x}+\frac{1}{2^{-x}}\right)=f(x)$，故 C 错，D 正确. 故选 D.

11. B　易求 $AB=2\sqrt{2}$，连接 C_1P，则 $C_1P=\sqrt{CP^2-CC_1^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=2$，$A_1C_1=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$，而 $A_1P=2$，则点 P 在 A_1C_1 上且为 A_1C_1 的中点. 连接 AC 与 BD 交于点 O，连接 PO，易证 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，则 $\angle CPO$ 为直线 CP 与平面 BDD_1B_1 所成的角. 在直角 $\triangle CPO$ 中，$\sin\angle CPO=\frac{OC}{PC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



12. D　易求 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；利用诱导公式可得 $f(\pi-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；$f(x)=|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sqrt{2}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$，令 $t=x+\frac{\pi}{4}$，则 $y=\sqrt{2}(|\sin t|+|\cos t|)$，易证 $y=\sqrt{2}(|\sin t|+|\cos t|)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $y=\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，所以在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $y_{\min}=\sqrt{2}$，由周期性知在 $\mathbf{R}$ 上 $y_{\min}=\sqrt{2}$；$f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位长度可得 $g(x)=\sqrt{2}(|\sin x|+|\cos x|)$，所以在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，又 $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$. 故选 D.　

13. -3　因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,1)-2(m,-4)=(-3-2m,9)$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=(-3,1)\cdot(-3-2m,9)=9+6m+9=0$，解得 $m=-3$.

14. $2x+y+3=0$　$f'(x)=e^x+(x-3)e^x=(x-2)e^x$，则切线斜率为 $f'(0)=-2$，又 $f(0)=-3$，则所求切线方程为 $y-(-3)=-2(x-0)$，即 $2x+y+3=0$.

15. $\frac{2}{3}$　由 $\sin\frac{\pi x}{4}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $-\frac{5\pi}{4}+2k\pi\leqslant\frac{\pi x}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $-5+8k\leqslant x\leqslant1+8k(k\in\mathbf{Z})$，结合 $x\in[-8,4]$，得 $x\in[-8,-7]\cup[-5,1]\cup[3,4]$，又在区间 $[-8,4]$ 上任取一个数 x，故事件“$\sin\frac{\pi x}{4}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$”发生的概率 $p=\frac{-7-(-8)+1-(-5)+4-3}{4-(-8)}=\frac{2}{3}$.

16. $\frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$　设矩形 $ABCD$ 的两边长分别为 a,b，由题意可求得 $ab=16$，所以该长方体的表面积为 $2ab+2\sqrt{5}\times2(a+b)=32+4\sqrt{5}(a+b)\geqslant32+4\sqrt{5}\times2\sqrt{ab}=32+32\sqrt{5}$，当且仅当 $a=b=4$ 时等号成立，即表面积最小时 $a=b=4$. 设此时该长方体外接球的半径为 r，$2r=\sqrt{a^2+b^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{13}$，所以 $r=\sqrt{13}$，所以外接球的体积为 $\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$.

17. 解：因为 $n\geqslant2$ 时，$a_n=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}$，所以 $n=2$ 时，$a_2=a_1=1$；…………………………………… 1 分

当 $n\geqslant3$ 时，$a_{n-1}=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-2}a_{n-2}$，

两式相减得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant3)$，…………………………………… 2 分

所以 $a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant3)$. 因为 $a_2=1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}(n\geqslant3)$，…………………………………… 3 分

所以$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n-2}$，$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\frac{n-2}{n-3}$，…，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}$，

累乘，得$\frac{a_n}{a_2}=\frac{n}{2}(n\geqslant 3)$，所以$a_n=\frac{n}{2}(n\geqslant 3)$. ………………………………………… 5分

显然$n=2$时满足，$n=1$时不满足，所以$a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \frac{n}{2}, n\geqslant 2.\end{cases}$ ………………………………………… 6分

(2)因为$n\geqslant 1$时，$n+2>n+1\geqslant 2$，所以$b_n=\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. ………… 9分

所以$S_n=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2n}{n+2}$. ………………………………………… 12分

18. 解：(1)$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{120+105+100+95+80}{5}=100$，

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1\ 410$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=55$， ………………………………………… 2分

所以$\hat{b}=\frac{1\ 410-5\times 3\times 100}{55-5\times 3^2}=-9$，$\hat{a}=100-(-9)\times 3=127$，

所以$\hat{y}=-9x+127$. ………………………………………… 4分

所以当$x=9$时，$\hat{y}=-9\times 9+127=46$，即可预测该路口9月份不“礼让行人”的违章驾驶人次为46. ………… 6分

(2)由题意，得2×2列联表为

	不礼让行人	礼让行人	合计
驾龄不超过1年	24	16	40
驾龄1年以上	16	14	30
合计	40	30	70

………… 8分

$K^2=\frac{70(24\times 14-16\times 16)^2}{40\times 30\times 40\times 30}\approx 0.311<2.706$， ………………………………………… 10分

所以没有90%的把握认为“礼让行人”的行为与驾龄有关. ………………………………………… 12分

19. (1)证明：因为G是BP的中点，所以$PG=\frac{1}{2}BP=1$.

又因为$AE=1$，所以$AE=PG$. ………………………………………… 1分

又因为$AE// PG$，$AE\perp EP$，所以四边形$AEPG$是矩形.

所以$AG// EP$. ………………………………………… 3分

又$AG\not\subset$平面α，$PE\subset$平面α，所以$AG//$平面α.

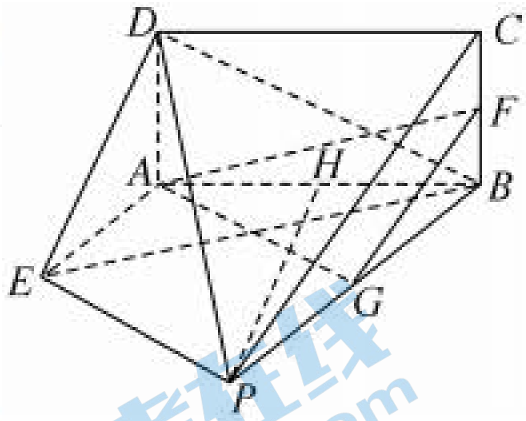
因为F，G分别是BC，BP的中点，所以FG是$\triangle BCP$的中位线，所以$FG// PC$. ………………… 4分

又$FG\not\subset$平面α，$PC\subset$平面α，所以$FG//$平面α.

因为$AG\cap FG=G$，且AG，$FG\subset$平面AFG，所以平面$AFG//$平面α. ………………………… 6分

(2)解：方法一：过点P作$PH\perp AB$，垂足为H.

易知$AD\perp$平面$ABPE$，所以$V_{四棱锥D-ABPE}=\frac{1}{3}S_{梯形ABPE}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1+2}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………… 8分



因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABPE$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABPE=AB$，$PH\subset$ 平面 $ABPE$，

所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，即 PH 是三棱锥 $P-BCD$ 的高. ………………………… 9 分

因为 $AG=EP=\sqrt{3}$，$PG=AE=1$，$BG=BP-PG=2-1=1$，

所以由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AG^2+BG^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，所以 $CD=AB=2$.

所以 $\sin\angle ABG=\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………… 10 分

所以 $PH=BP\cdot\sin\angle ABG=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

所以 $V_{\text{三棱锥}P\text{-}BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 11 分

所以 $V_{\text{四棱锥}D\text{-}ABPE}:V_{\text{三棱锥}P\text{-}BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3}{2}$. ………………………………………………………… 12 分

方法二：易知 $V_{\text{四棱锥}D\text{-}ABPE}=\dfrac{1}{3}S_{\text{梯形}ABPE}\cdot AD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1+2}{2}\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 8 分

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABPE$，$BC\perp AB$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABPE=AB$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BC\perp$ 平面 $ABPE$，又 $AG\subset$ 平面 $ABPE$，所以 $BC\perp AG$，

又 $AG\perp PB$，$PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AG\perp$ 平面 PBC， ………………………… 10 分

易知 $AD//$ 平面 PBC，D 到平面 PBC 的距离就是 AG，

所以 $V_{\text{三棱锥}P\text{-}BCD}=V_{\text{三棱锥}D\text{-}BCP}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ………………………………………… 11 分

所以 $V_{\text{四棱锥}D\text{-}ABPE}:V_{\text{三棱锥}P\text{-}BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3}{2}$. ………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为焦距 $2c$ 为 2，长轴长为 4，

即 $2c=2$，$2a=4$，所以 $c=1$，$a=2$. ………………………………………………………… 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$. ………………………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $F_1(-1,0)$，设点 $E(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$M(m,0)$.

因为直线 l 不与 x 轴重合，所以设直线 l 的方程为 $x=ny-1$.

联立 $\begin{cases}x=ny-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3n^2+4)y^2-6ny-9=0$，

所以 $\Delta=(-6n)^2+36(3n^2+1)>0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{6n}{3n^2+1}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3n^2+4}$. ………………………………………………………… 6 分

又 $x_1x_2=(ny_1-1)(ny_2-1)=n^2y_1y_2-n(y_1+y_2)+1=-\dfrac{9n^2}{3n^2+4}-\dfrac{6n^2}{3n^2+4}+1=-\dfrac{12n^2-4}{3n^2+4}$，

$x_1+x_2=n(y_1+y_2)-2=\dfrac{6n^2}{3n^2+4}-2=-\dfrac{8}{3n^2+4}$， ………………………………………………… 7 分

直线 ME、MD 的斜率分别为 $k_{ME}=\frac{y_1}{x_1-m}$，$k_{MD}=\frac{y_2}{x_2-m}$，

则 $k_{ME}\cdot k_{MD}=\frac{y_1}{x_1-m}\cdot\frac{y_2}{x_2-m}=\frac{y_1y_2}{(x_1-m)(x_2-m)}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2}$

$=\frac{\frac{-9}{3n^2+4}}{-\frac{12n^2-4}{3n^2+4}-m\left(\frac{-8}{3n^2+4}\right)+m^2}=\frac{-9}{-12n^2+4+8m+3m^2n^2+4m^2}=-\frac{9}{(3m^2-12)n^2+4(m+1)^2}$. ………… 9 分

要使得直线 ME、MD 的斜率之积恒为定值，只需 $3m^2-12=0$，解得 $m=\pm2$.

当 $m=2$ 时，存在点 $M(2,0)$，使得 $k_{ME}\cdot k_{MD}=-\frac{9}{(3m^2-12)n^2+4(m+1)^2}=-\frac{9}{36}=-\frac{1}{4}$；

当 $m=-2$ 时，存在点 $M(-2,0)$，使得 $k_{ME}\cdot k_{MD}=-\frac{9}{(3m^2-12)n^2+4(m+1)^2}=-\frac{9}{4}$； ………… 11 分

综上，在 x 轴上存在点 M，使得直线 ME、MD 的斜率之积恒为定值.

当点 M 的坐标为 $(2,0)$ 时，直线 ME、MD 的斜率之积恒为定值 $-\frac{1}{4}$；

当点 M 的坐标为 $(-2,0)$ 时，直线 ME、MD 的斜率之积恒为定值 $-\frac{9}{4}$. ………… 12 分

21. 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. ………… 1 分

(1) 当 $x\in[-2,-1]$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}\leqslant0$，则 $\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right|=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$，

所以 $f(x)=1-a\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right|=1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}$. ………… 2 分

所以 $f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{2a}{x^3}=-\frac{a(x+2)}{x^3}$.

当 $x\in[-2,-1]$ 时，$x+2\geqslant0$，$x^3<0$，所以 $-\frac{x+2}{x^3}\geqslant0$. ………… 3 分

因为 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增，则对任意 $x\in[-2,-1]$，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，且 $f'(x)$ 不恒为 0，

所以 $a\geqslant0$，又当 $a=0$ 时，$f'(x)$ 恒为 0，所以 $a>0$.

故实数 a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. ………… 5 分

(2) $f(x)=1-a\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right|=\begin{cases}1-\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}, & x\geqslant-1\text{ 且 }x\neq0,\\ 1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}, & x<-1.\end{cases}$ ………… 6 分

① 当 $x\geqslant-1$，且 $x\neq0$ 时，$f'(x)=-a\left(-\frac{1}{x^2}\right)+(-a)\left(-\frac{2}{x^3}\right)=a\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=\frac{a(x+2)}{x^3}$，

因为 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $-1\leqslant x<0$；令 $f'(x)<0$，得 $x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； ………… 8 分

② 当 $x<-1$ 时，$f'(x)=a\left(-\frac{1}{x^2}\right)+a\left(-\frac{2}{x^3}\right)=-\frac{a(x+2)}{x^3}$，

因为 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<-2$；令 $f'(x)<0$，得 $-2<x<-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递增，在 $(-2,-1)$ 上单调递减. ………… 10 分

综上所述，当 $a<0$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	无定义	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增	无定义	单调递减

故函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，在 $x=-1$ 处取得极小值. ………………………… 12 分

22. 解：(1) 因为 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ 所以 $x^2+y^2+2y-3=0$，

即圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y+1)^2=4$. ………………………… 3 分

由 $\begin{cases} x=1-t, \\ y=2t \end{cases}$ 得 $y=2(1-x)$，得 $2x+y-2=0$，即直线 l 的普通方程为 $2x+y-2=0$. ………………………… 5 分

(2) 由题意，得 $M(1,0)$，直线 l 参数方程为 $\begin{cases} x=1-\frac{1}{\sqrt{5}}u, \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}u \end{cases}$ (u 为参数)，代入圆 C 的方程，得 $u^2+\frac{2}{\sqrt{5}}u-2=0$，……… 7 分

所以 $\Delta=\frac{4}{5}+8>0$，$u_1+u_2=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，$u_1u_2=-2$，………………………… 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|u_1|}+\frac{1}{|u_2|}=\frac{|u_1|+|u_2|}{|u_1u_2|}=\frac{|u_1-u_2|}{|u_1u_2|}=\frac{\sqrt{(u_1+u_2)^2-4u_1u_2}}{|u_1u_2|}=\frac{\sqrt{55}}{5}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=\begin{cases} -2x-1, x<-3, \\ 5, -3\leqslant x\leqslant 2, \\ 2x+1, x>2. \end{cases}$ ………………………… 1 分

当 $x<-3$ 时，不等式可化为 $-2x-1>7$，解得 $x<-4$，所以 $x<-4$； ………………………… 2 分

当 $-3\leqslant x\leqslant 2$ 时，不等式可化为 $5>7$，无解； ………………………… 3 分

当 $x>2$ 时，不等式可化为 $2x+1>7$，解得 $x>3$，所以 $x>3$. ………………………… 4 分

综上，不等式 $f(x)>7$ 的解集是 $(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$. ………………………… 5 分

(2) 因为 $|x-2|+|x+3|=|2-x|+|x+3|\geqslant|2-x+x+3|=5$，………………………… 7 分

所以 $(|x-2|+|x+3|)_{\min}=5$. ………………………… 8 分

要使 $|x-2|+|x+3|<a-1$ 无解，只需 $a-1\leqslant 5$，解得 $a\leqslant 6$.

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,6]$. ………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。