一、选择题

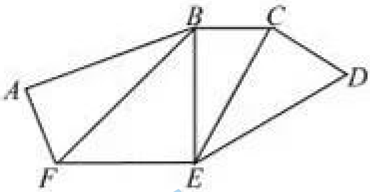
1．已知集合 $M=\{2,0,1,9\}$，A 是 M 的子集，且 A 中各元素之和为 3 的倍数，则满足条件的子集 A 的个数是

（A）8.　　（B）7.　　（C）6.　　（D）5.

答：B.

解：经枚举，各元素之和为 3 的倍数的子集有 $\{0\}$，$\{9\}$，$\{2,1\}$，$\{0,9\}$，$\{2,0,1\}$，$\{2,1,9\}$，$\{2,0,1,9\}$ 共 7 个.

2．如图，$\angle BAF=\angle FEB=\angle EBC=\angle ECD=90^\circ$，　$\angle ABF=30^\circ$，　$\angle BFE=45^\circ$，$\angle BCE=60^\circ$，$AB=2CD$，则 $\tan\angle CDE$ 等于



（A）$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.（C）$\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$.（D）$\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

答案：选 A.

解：因为 $\tan\angle CDE=\dfrac{EC}{CD}$，考虑已知条件，有

$$2=\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{BF}\times\frac{BF}{BE}\times\frac{BE}{EC}\times\frac{EC}{CD}$$

$$=\cos 30^\circ\times\frac{1}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ\times\tan\angle CDE$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\tan\angle CDE.$$

所以　$\tan\angle CDE=\dfrac{8}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

3．对于无理数 $e=2.71828182845\cdots$，定义函数 $f(n)=k$，定义域是正整数，其中 k 是 e 的小数点后第 n 位的数字，规定 $f(0)=2$，则 $f(f(f(n)))$ 的值域是

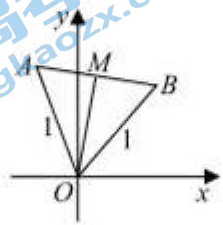
（A）$\{3,4,6,9\}$.　（B）$\{2,0,1,9\}$.　（C）$\{0,3,5,9\}$.　（D）$\{1,2,7,8\}$.

答：D．

解：易知 $f(n)$ 的值域为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$， $f(f(n))$ 的值域为 $\{1, 2, 7, 8\}$，$f(f(f(n)))$ 的值域是 $\{1, 2, 7, 8\}$．

4．在平面直角坐标系中，已知两点 $A(\cos110°, \sin110°)$，$B(\cos50°, \sin50°)$，则由坐标原点 O 到 AB 中点 M 的距离是

（A）$\dfrac{1}{2}$．　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　（D）1．



答：选 C．

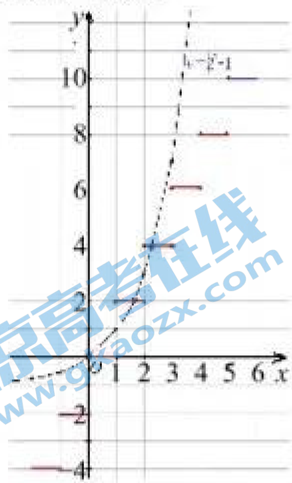
解：画草图，易知 $OA=1$，$OB=1$，

$\angle AOB = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$．

所以，ΔAOB 是正三角形．所以，$|AB|=1$．由点 O 到 AB 中点 M 的距离是边长为 1 的正三角形的高线的长，即等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

5．设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则方程 $2^x-2[x]-1=0$ 的根的个数是

（A）4．　（B）3．　（C）2．　（D）1．

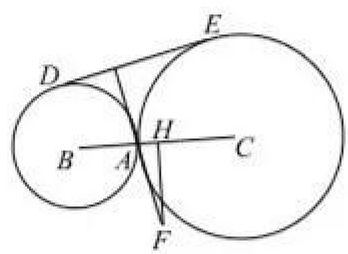


答：B．

解：因为方程 $2^x-2[x]-1=0$ 的根的个数等价于函数 $y=2^x-1$ 的图象与函数 $y=2[x]$ 的图象的交点个数．在同一个平面直角坐标系中，分别画出函数 $y=2^x-1$ 的图象与函数 $y=2[x]$ 的图象，如右图，两函数的图象共有 3 个交点，所以方程 $2^x-2[x]-1=0$ 有 3 个根．

6．如图，已知半径分别等于 3 厘米和 5 厘米的⊙B，⊙C 外切于点 A．两圆的一条外公切线切⊙B 于点 D，切⊙C 于点 E，过 A 作 DE 的垂线与 BC 的中垂线交于点 F，H 是 BC 的中点．则△AHF 的面积等于

（A）$\dfrac{\sqrt{11}}{2}$．（B）$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$．（C）$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$．（D）$\dfrac{\sqrt{17}}{2}$．



答：C．

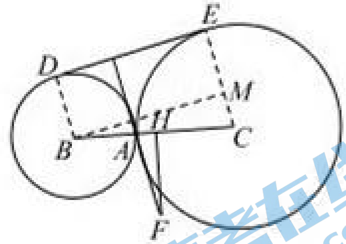
解：如图，连接 BD、CE，过 B 作 CE 的垂线，垂足为 M，因为 DE 是两圆的公切线，D、E 是切点，所以 $BD\perp DE$，$CE\perp DE$，于是四边形 $BDEM$ 为矩形，有 $BM /\!/ DE$，$BD=EM$，

$CM=CE-BD=2$．易知，$\triangle FHA \backsim \triangle BMC$，所以 $\dfrac{S_{\Delta AHF}}{S_{\Delta CMB}}=\left(\dfrac{AH}{CM}\right)^2$，

又 $AH=BH-BA=\dfrac{BA+AC}{2}-BA=4-3=1$．

在 Rt△BCM 中，根据勾股定理，有 $BM=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$，

所以，$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{15}\times 2=2\sqrt{15}$，进而有



$$S_{\triangle AHF}=S_{\triangle CMB}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

二、填空题

1．计算$\frac{714285^3+285714^3}{714285^3+428571^3}=$________.

答：$\frac{7}{8}$.

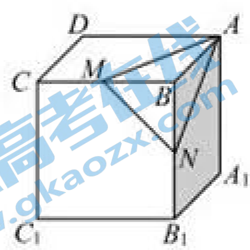
解 1：原式$=\frac{(714285+285714)(714285^2-714285\times285714+285714^2)}{(714285+428571)(714285^2-714285\times428571+428571^2)}$

$$=\frac{(714285+285714)(714285^2-428571\times285714)}{(714285+428571)(714285^2-285714\times428571)}$$

$$=\frac{714285+285714}{714285+428571}=\frac{999999}{1142856}=\frac{7\times142857}{8\times142857}=\frac{7}{8}.$$

解 2：原式$=\frac{(142857\times5)^3+(142857\times2)^3}{(142857\times5)^3+(142857\times3)^3}=\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{133}{152}=\frac{7\times19}{8\times19}=\frac{7}{8}$.

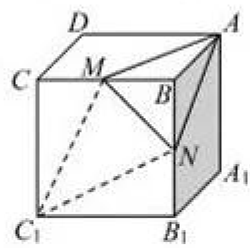
2．一个正方体木块 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 512cm^3，如图，M 为棱 CB 的中点，N 为棱 BB_1 的中点．过 A，M，N 三点的平面切下一个三棱锥 $B\text{-}AMN$，则三棱锥 $B\text{-}AMN$ 的全表面积是________ cm^2.



答：64.

解：　如右图，　连接 MC_1 和 NC_1．　易知$\triangle AMN\cong\triangle C_1MN$，$\triangle ABM\cong\triangle C_1CM$，$\triangle ABN\cong\triangle C_1B_1N$，$\triangle MNB\cong\triangle MNB$.

因此，三棱锥 $B\text{-}AMN$ 的全表面积等于正方形 BB_1C_1C 的面积，即为 64 cm^2.



3．函数 $f(x)$满足 $f(1)=1$，且 $f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n(n-1)}$，其中 $n\geqslant2$，$n\in N_+$，那么 $f(2019)=$________.

答：$\frac{4037}{2019}$.

解：因为 $f(n)-f(n-1)=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，所以

$$f(2)-f(1)=1-\frac{1}{2},$$

$$f(3)-f(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$f(4)-f(3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

……

$$f(2018)-f(2017)=\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018},$$

$$f(2019)-f(2018)=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}.$$

将以上各式等号两边分别相加得 $f(2019)-f(1)=1-\dfrac{1}{2019}$，进而有

$$f(2019)=2-\frac{1}{2019}=1\frac{2018}{2019}.$$

4．整数 a,b,c 满足 $a+b+c=2$，且 $S=(2a+bc)(2b+ca)(2c+ab)>200$，那么 S 的最小值是________．

答：256．

解：因为 $a+b+c=2$，所以

$$S=(bc-2b-2c+4)(ca-2c-2a+4)(ab-2a-2b+4)$$
$$=[(b-2)(c-2)]\cdot[(c-2)(a-2)]\cdot[(a-2)(b-2)]$$
$$=(a-2)^2(b-2)^2(c-2)^2$$

是个平方数．

因为 $a+b+c=2$，a,b,c 是整数，所以 a,b,c 中至少有一个是偶数，因此 S 为偶数，且已知 $S>200$，所以 $S\geqslant 16^2=256$．而当 $a=4$，$b=0$，$c=-2$ 时，$S=256$．所以 S 的的最小值为 256．

5．将正整数 $1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$ 按第 k 组含 $k+1$ 个数分组：

$$\underbrace{(1,2)}_{\text{第1组}},\underbrace{(3,4,5)}_{\text{第2组}},\underbrace{(6,7,8,9)}_{\text{第3组}},\underbrace{(10,11,12,13,14)}_{\text{第4组}},\cdots$$

则 2019 在第________组中．

答：63．

解：易知第 n 组的最后一个数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}+n$，当 $n=62$ 时，$\dfrac{62\times 63}{2}+62=2015$．可见，2015 是第 62 组的最后一个数，因此 2019 应在第 63 组中．

6．已知集合 $A=\{x|x^2+x-6>0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+3\leqslant 0\}$，若 $a>0$，且 $A\cap B$ 中恰有两个整数，则 a 的取值范围是________．

答：$[2.625,\ 2.8)$

解：因为 $A=\{x|x^2+x-6>0\}$，即 $A=\{x|x<-3$ 或 $x>2\}$，$B=\{x|x^2-2ax+3\leqslant 0\}$，

又知 $A\cap B$ 中恰有两个整数，所以 $A\cap B\neq\varnothing$，因此 B 有实根，$\Delta=4a^2-12>0$． 解得 $a>\sqrt{3}$ 或 $a<-\sqrt{3}$．又因为已知 $a>0$，所以 $a>\sqrt{3}$．

所以 $B=\{x|a-\sqrt{a^2-3}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{a^2-3}\}$．

由于 $0<a-\sqrt{a^2-3}=\dfrac{3}{a+\sqrt{a^2-3}}<\sqrt{3}<2$，

所以 $A\cap B$ 中恰有两个整数根只能是 3 和 4.

由于 $f(x)=x^2-2ax+3$，所以 $f(4)=16-8a+3\leqslant 0$，$f(5)=25-10a+3>0$，解得 $\dfrac{21}{8}\le a<\dfrac{14}{5}$，即 $2.625\leqslant a<2.8$．也即 $[2.625, 2.8)$．

7．若 p, q 都是质数，自然数 $a=p^{\alpha}q^{\beta}$ 的约数的个数 $d(a)$ 由公式

$$d(a)=(\alpha+1)(\beta+1)$$

给出．如 $12=2^2\times 3^1$，所以 12 的约数个数为 $d(12)=(2+1)(1+1)=6$，它们是 1,2,3,4,6 和 12.

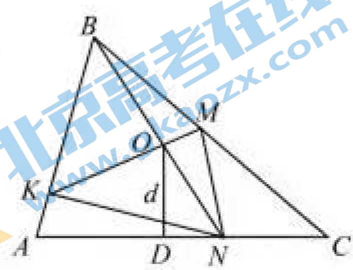
根据给出的计算公式请你回答：在小于 20^{15} 的 20^{30} 的约数中，不是 20^{15} 的约数的数共有________个．

答：450.

解：$20^{30}=2^{60}\times 5^{30}$，所以 $d(20^{30})=(60+1)(30+1)=61\times 31=1891$．又 $20^{30}=20^{15}\times 20^{15}$，是个平方数，除了 20^{15}，任取一个约数大于 20^{15} 就有一个约数小于 20^{15}，两数的乘积恰等于 20^{30}，因此在 20^{30} 的约数中，小于 20^{15} 的约数共有 $\dfrac{1891-1}{2}=945$ 个．

另外，20^{15} 的约数都是 20^{30} 的约数，又因为 $20^{15}=2^{30}\times 5^{15}$，得 $d(20^{15})=(30+1)(15+1)=496$．所以，小于 20^{15} 的 20^{30} 的约数中，不是 20^{15} 的约数共有 $945-496+1=450$ 个．

8．在△ABC 的边 AB 和 BC 上分别取点 K 和 M，使得 $AK:KB=1:4$，$BM:MC=4:5$，在线段 KM 上取点 O，使得 $KO:OM=3:1$，N 是射线 BO 与 AC 的交点，$AC=a$，由点 O 到边 AC 的距离 $OD=d$，则△KMN 的面积等于________．



答：$\dfrac{ad}{3}$．

解：过点 M 作 BN 的平行线，交 NC 于点 M'，过点 K 作 BN 的平行线，交 AN 于点 K'，连接 OM'，OK'．则

$S_{\triangle NOM}=S_{\triangle ONM'}$，$S_{\triangle NOK}=S_{\triangle ONK'}$，相加得 $S_{\triangle KMN}=S_{\triangle OMK}$．

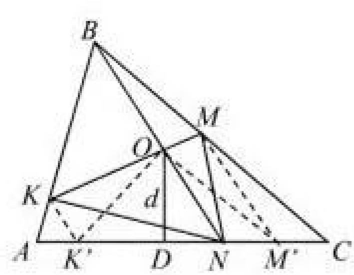
注意到 $\dfrac{NM'}{M'C}=\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{4}{5}$，设 $NM'=4u$，$M'C=5u$．

由 $K'N:NM'=KO:OM=3:1$，得 $K'N=12u$．

由 $AK':K'N=AK:KB=1:4$，得 $AK'=3u$．于是

$K'M'=12u+4u=16u$，

$AC=3u+12u+4u+5u=24u$．



因此 $K'M':AC=16u:24u=2:3$，得 $K'M'=\dfrac{2}{3}AC=\dfrac{2}{3}a$．

所以 $S_{\triangle KMN}=S_{\triangle OM'K'}=\dfrac{1}{2}K'M'\times OD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}a\cdot d=\dfrac{ad}{3}$．