房山区中学 2023-2024 学年度第一学期期中学业水平调研

高二数学

本调研卷共 6 页，共 150 分。时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在调研卷上作答无效。调研结束后，将答题卡交回，调研卷自行保存。

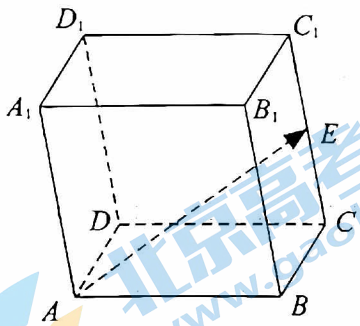
第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知 $A(-1,3), B(3,5)$，则线段 AB 的中点坐标为

（A）$(1,4)$　　（B）$(2,1)$　　（C）$(2,8)$　　（D）$(4,2)$

（2）如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 CC_1 中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}$，则 $\overrightarrow{AE}=$



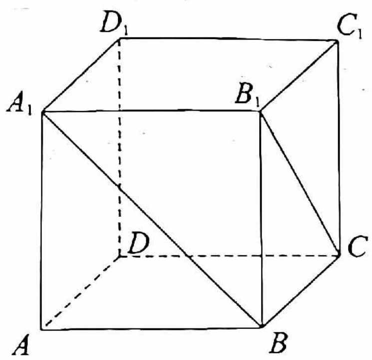
（A）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（B）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

（C）$\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（D）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（3）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B, B_1C 所成角的大小为



（A）30°

（B）45°

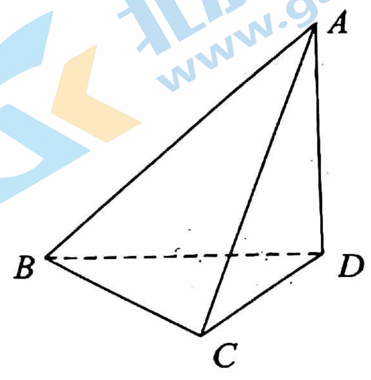
（C）60°

（D）90°

（4）在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=$

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$4\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）4

（5）如图，在四面体 $A\text{-}BCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，则下列叙述中错误的是



（A）$\angle ACD$ 是直线 AC 与平面 BCD 所成角

（B）$\angle ABD$ 是二面角 $A-BC-D$ 的一个平面角

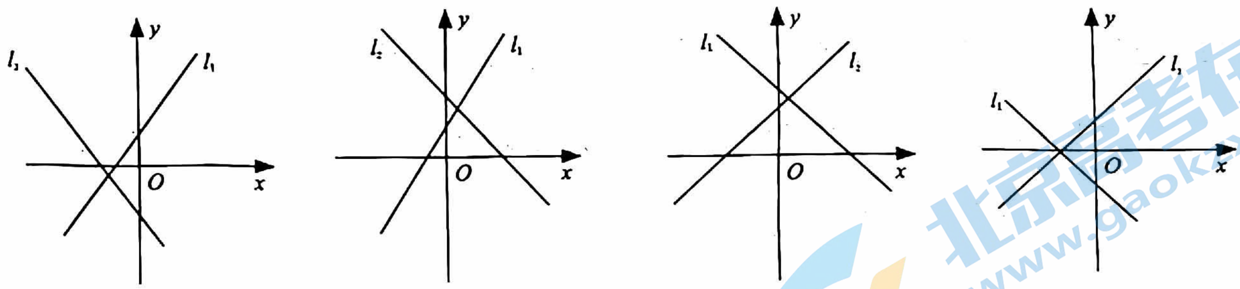
（C）线段 AC 的长是点 A 到直线 BC 的距离

（D）线段 AD 的长是点 A 到平面 BCD 的距离

（6）已知直线 $l_1: 2x+(a-1)y+a=0$ 与直线 $l_2: ax+y+2=0$ 平行，则 a 的值为

（A）-1 或 2　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）2　　（D）-1

（7）在同一平面直角坐标中，表示 $l_1: y=ax+b$ 与 $l_2: y=bx-a$ 的直线可能正确的是



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

（8）长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，M 为 AB 的中点，$D_1M\perp MC$，则 $AD=$

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（9）设 P 为直线 $y=-1$ 上的动点，过点 P 做圆 $C:(x+3)^2+(y-2)^2=4$ 的切线，则切线长的最小值为

（A）2　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）3　　（D）$\sqrt{13}$

（10）古希腊数学家阿波罗尼斯（约公元前 262—公元前 190 年）的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，著作中有这样一个命题：平面内与两定点距离的比为常数 $K(K>0,K\neq 1)$ 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆. 已知点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，圆 $C:(x-2)^2+(y-m)^2=\frac{1}{4}(m>0)$，在圆 C 上存在点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，则实数 m 的取值范围是

（A）$[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}]$　　（B）$[\frac{5}{4},\frac{\sqrt{21}}{2}]$

（C）$(0,\frac{\sqrt{21}}{2}]$　　（D）$[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{21}}{2}]$

第二部分（非选择题　共 100 分）

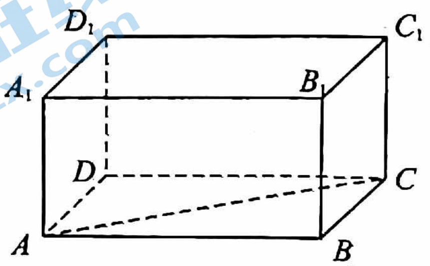
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）已知 $A(2,1),B(0,-3)$，则直线 AB 的斜率 $k_{AB}=$____.

（12）已知 $A(0,0),B(2,2),C(4,2)$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为____.

（13）已知直线 l 与平面 α 所成角为 45°，A,B 是直线 l 上两点，且 $AB=6$，则线段 AB 在平面 α 内的射影的长等于____.

（14）如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=1,AB=2$，则点 D_1 到点 B 的距离等于____；点 D_1 到直线 AC 的距离等于____.



（15）已知圆 $O: x^2+y^2=r^2(r>0)$ 和直线 $l: x-y+4=0$，则圆心 O 到直线 l 的距离等于___；若圆 O 上有且仅有两个点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$，写出一个符合要求的实数 r 的值，$r=$___.

（16）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$\triangle PAB$ 是等边三角形，O 为 AB 的中点，且 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，点 F 为棱 PC 上一点. 给出下面四个结论：

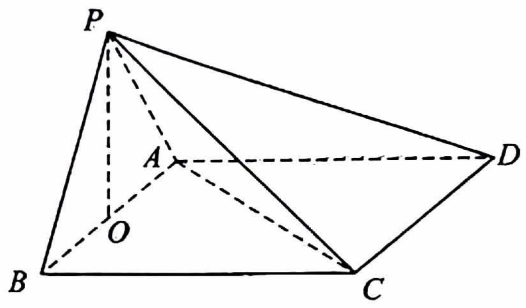
① 对任意点 F，都有 $CD\perp OF$；

② 存在点 F，使 $OF\parallel$ 平面 PAD；

③ 二面角 $P-AC-B$ 的正切值为 $\sqrt{6}$；

④ 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

其中所有正确结论的序号是___.



三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 14 分）

已知三条直线 $l_1: x+y-2=0$，$l_2: x-3y+10=0$，$l_3: 3x-4y+5=0$.

（Ⅰ）求直线 l_1，l_2 的交点 M 的坐标；

（Ⅱ）求过点 M 且与直线 l_3 平行的直线方程；

（Ⅲ）求过点 M 且与直线 l_3 垂直的直线方程.

（18）（本小题 14 分）

已知圆 C 的圆心为点 $C(1,-3)$，半径为 2.

（Ⅰ）写出圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 $l: x-y-2=0$ 与圆 C 交于 A,B 两点，求线段 AB 的长.

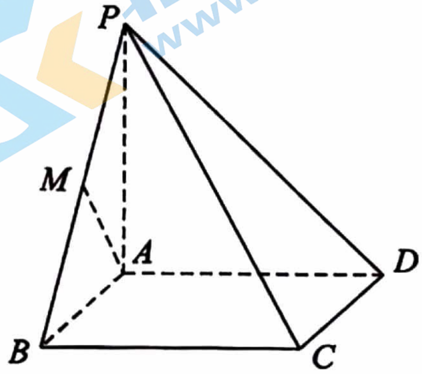
(19)（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA=AB=1$，M 为 PB 的中点.

（Ⅰ）求证：$AM\perp$ 平面 PBC；

（Ⅱ）求直线 PD 与平面 PBC 所成角的大小；

（Ⅲ）求点 D 到平面 PBC 的距离.



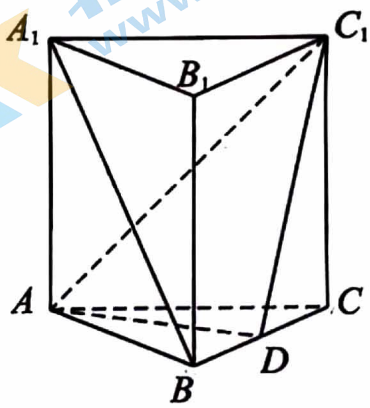
(20)（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1A\perp$ 平面 ABC，D 是 BC 的中点，$BC=\sqrt{2}$，$A_1A=AB=AC=1$.

（Ⅰ）求证：$A_1B\,//$ 平面 ADC_1；

（Ⅱ）求二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）判断直线 A_1B_1 与平面 ADC_1 是否相交，如果相交，求出 A 到交点 H 的距离；如果不相交，求直线 A_1B_1 到平面 ADC_1 的距离.



(21)(本小题 14 分)

已知圆 $M:x^2+y^2-4x-2y=0$ 和直线 $l:y=kx-1$.

(Ⅰ)写出圆 M 的圆心和半径;

(Ⅱ)若在圆 M 上存在两点 A,B 关于直线 l 对称,且以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点,求直线 AB 的方程.

房山区 2023-2024 学年度第一学期期中学业水平调研

高二数学 参考答案与评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	D	B	D	C	A	B	D

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

（11）2　　（12）$x^2+y^2-6x+2y=0$ 或 $(x-3)^2+(y+1)^2=10$；

（13）$3\sqrt{2}$　　（14）$\sqrt{6}$; $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

（15）$2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$（答案不唯一，$(\sqrt{2},3\sqrt{2})$ 即可）　　（16）②③④

（说明：1.第（14），（15）题第一空 3 分，第二空 2 份；
2.第（16）题有错选给 0 分；否则选 1 个给 2 分，选 2 个给 3 分，选 3 个给 5 分）

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 14 分）4+6+4

（Ⅰ）解方程组 $\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-3y+10=0 \end{cases}$　　--------2 分

得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$　　--------1 分

所以 直线 l_1，l_2 的交点为 $M(-1,3)$.--------1 分

（Ⅱ）解法一：直线 l_3 的方程可化为：$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$，

所以 $k_{l_3}=\dfrac{3}{4}$.　　--------2 分

因为所求直线与直线 l_3 平行，所以所求直线的斜率为 $\dfrac{3}{4}$，--------2 分

所以所求直线方程为 $y-3=\dfrac{3}{4}(x+1)$，

即 $3x-4y+15=0$.　　--------2 分

解法二：设过点 M 且与直线 l_3 平行的直线方程为 $3x-4y+m=0$.--------2 分

因为所求直线过点 $M(-1,3)$，

所以 $3\times(-1)-4\times3+m=0$，解得 $m=15$.--------2 分

所以 所求直线方程为 $3x-4y+15=0$.　--------2 分

（III）由（II）知 $k_{l_3}=\frac{3}{4}$.

因为 所求直线与直线 l_3 垂直，所以所求直线的斜率为 $-\frac{4}{3}$，--------2 分

所以所求直线方程为: $y-3=-\frac{4}{3}(x+1)$，

即 $4x+3y-5=0$.　　--------2 分

（18）（本小题 14 分）5+9

（I）圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$.　　--------5 分

整理得 $x^2=1$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$.

将 $x=1$ 代入方程 $x-y-2=0$，解得 $y=-1$，

将 $x=-1$ 代入方程 $x-y-2=0$，解得 $y=-3$，

所以 $A(1,-1),B(-1,-3)$，　--------4 分

所以 $|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(-1+3)^2}$　--------2 分（公式分）

$=2\sqrt{2}$　--------1 分

解法 2：圆心 $C(1,-3)$ 到直线 $x-y-2=0$ 的距离为

$$d=\frac{|1+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$ --------3 分（公式分）

$=\sqrt{2}$　--------1 分

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}$　--------3 分（公式分）

$=2\sqrt{2}$ --------2 分

（19）（本小题 14 分）5+6+3

（Ⅰ）解法 1：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BC$． --------1 分

因为 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AB\perp BC$．

又 $PA\cap AB=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB． --------1 分

因为 $AM\subset$ 平面 PAB，

所以 $BC\perp AM$． --------1 分

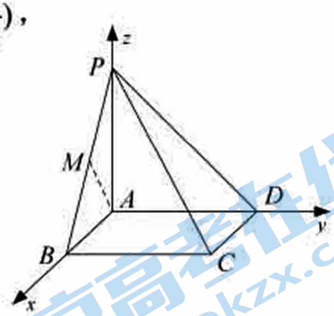
在 ΔPAB 中，$PA=AB$，M 为 PB 中点，

所以 $AM\perp PB$． --------1 分

又 $PB\cap BC=B$，

所以 $AM\perp$ 平面 PBC． --------1 分

解法 2：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$ABCD$ 为正方形，所以 AB,AD,AP 两两互相垂直，以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$． --------1 分



则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),P(0,0,1),M(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(0,1,0),\overrightarrow{BP}=(-1,0,1),\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$．

因为 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BP}=0$， --------1 分

所以 $AM\perp BC$，$AM\perp BP$． --------2 分

又 $PB\cap BC=B$，

所以 $AM\perp$ 平面 PBC． --------1 分

解法 3：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$ABCD$ 为正方形，所以 AB,AD,AP 两两互相垂直，以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$．

则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),P(0,0,1),M(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(0,1,0),\overrightarrow{BP}=(-1,0,1),\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$．

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0.\end{cases}\quad 所以\begin{cases}y=0,\\ -x+z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$，则得 $x=1$，，此时 $\vec{n}=(1,0,1)$．

所以 $\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(1,0,1)=\frac{1}{2}\vec{n}$，所以 $\overrightarrow{AM}\parallel\vec{n}$．

所以 $AM\perp$ 平面 PBC．

（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $ABCD$ 为正方形，所以 AB,AD,AP 两两互相垂直，以 A 坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),P(0,0,1),M(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$

由（Ⅰ）知，$\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ 为平面 PBC 的一个法向量 --------2 分

$$\left|\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{PD}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\left|\overrightarrow{PD}\right|}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\times0+0\times1+\frac{1}{2}\times(-1)}{\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}\times\sqrt{0+1+1}}\right|=\frac{1}{2}$$

-------2 分（公式、结果各 1 分）

设直线 PD 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{PD}>\right|=\frac{1}{2}$. --------1 分

所以直线 PD 与平面 PBC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$. --------1 分

（Ⅲ）设点 D 与平面 PBC 的距离为 d，

则 $$d=\left|\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\times0+0\times1+\frac{1}{2}\times(-1)}{\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$.--------3 分（公式 2 分，结果 1 分）

所以 点 D 与平面 PBC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（说明：1. 建坐标系分只给 1 次，记在第（Ⅰ）问；

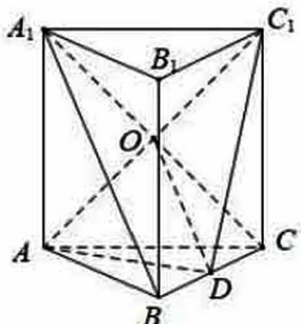
2. 计算法向量或明确法向量给 2 分，记在（Ⅱ）问；

3. 公式，可以是字母表示，也可以是通过数字体现.）

4. 第（Ⅰ）问方法多，酌情给分，要有理有据.）

（20）（本小题 14 分）7+4+3

（Ⅰ）解法 1：连接 A_1C 交 AC_1 于点 O，则 O 为 A_1C 中点，连接 OD，



在 ΔA_1BC 中，O,D 分别为 A_1C,BC 的中点

所以 $OD\parallel A_1B$ --------1 分

又 $OD\subset$ 平面 ADC_1，$A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1--------1 分

所以 $A_1B\parallel$ 平面 ADC_1.　--------1 分（前面逻辑关系正确给此 1 分）

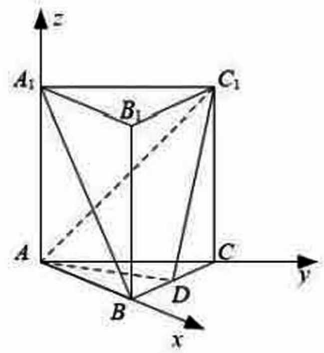
解法 2：在 ΔABC 中，$AB=AC=1,BC=\sqrt{2}$，所以 $AB\perp AC$　--------1 分

因为 $A_1A\perp$ 底面 ABC，所以 AB,AC,A_1A 两两互相垂直，以 A 坐标原点，

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0,0,0),A_1(0,0,1),B(1,0,0),C(0,1,0),C_1(0,1,1),D(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),\overrightarrow{AC_1}=(0,1,1),\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$



设平面 ADC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$　--------2 分

令 $y=-1$，则得 $x=1,z=1$，此时 $\vec{n}=(1,-1,1)$ --------1 分

$\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}=(1,0,-1)\cdot(1,-1,1)=0$--------1 分

所以 $\overrightarrow{A_1B}\perp\vec{n}$　--------1 分

又 $A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1

所以 $A_1B\parallel$ 平面 ADC_1.　--------1 分

（说明：如果用解法 1 给 3 分，同时将解法 2 的前 4 分记在第（Ⅰ）问）

（Ⅱ）解法 1：由（Ⅰ）知平面 ADC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,1)$，

易知平面 ACC_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，--------1 分

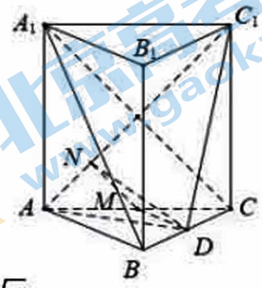
$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1\times1+(-1)\times0+1\times0}{\sqrt{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　---2 分（公式结果各 1 分）

设二面角 $D-AC_1-C$ 的平面角为 θ，如图可知 θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　--- --- ---1 分

所以二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 2：设 M 为 AC 中点，连接 DM，则 $DM\perp AC$.



易证 $DM\perp$ 平面 ACC_1A_1.

过 M 做 $MN\perp AC_1$，垂足为 N，连接 ND，

则 $\angle MND$ 为二面角 $D-AC_1-C$ 的平面角.

在直角三角形 MND 中，$MD=\dfrac{1}{2},MN=\dfrac{\sqrt{2}}{4},ND=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

所以 $\cos\angle MND=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）直线 A_1B_1 与平面 ADC_1 相交.　　--- --- ---1 分

$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,0,0)$，平面 ADC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,1)$，

$\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{n}=1\neq 0$.

所以 直线 A_1B_1 与平面 ADC_1 相交.
因为 H 为直线 A_1B_1 与平面 ADC_1 的交点，
所以点在直线 A_1B_1 上也在平面 ADC_1 上，

设 $H(x,0,1)$，则 $\overrightarrow{AH}=(x,0,1)$

因为 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}=0$，
所以 $x+1=0$，$x=-1$.

所以 $\overrightarrow{AH}=(-1,0,1),\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{2}$，

所以 A 到交点 H 的距离为 $\sqrt{2}$.　　--- --- ---2 分（结果 1 分，说理 1 分）

（21）（本小题 14 分）4+10

（Ⅰ）由 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 得 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

所以 圆 M 的圆心为 $M(2,1)$ 和半径 $r=\sqrt{5}$. --------4 分

（Ⅱ）因为 A,B 关于直线 $l:y=kx-1$ 对称，所以直线 l 经过圆心，且直线 AB 与直线 l 垂直.

将 $(2,1)$ 代入 $y=kx-1$，得 $k=1$，--------1 分

则直线 AB 的斜率为 -1.　　--------1 分

设直线 AB 方程为 $y=-x+b$，代入圆的方程 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，整理得

$2x^2-(2b+2)x+b^2-2b=0$（$\Delta=-4b^2+24b+4>0$）.--------2 分

（说明：判别式给 1 分，解答过程中有体现就可）

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=b+1,x_1x_2=\dfrac{b^2-2b}{2}$.--------2 分

因为以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$.　　--------1 分

$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(-x_1+b)(-x_2+b)=2x_1x_2-(x_1+x_2)b+b^2$

$=2x_1x_2-(x_1+x_2)b+b^2$　　--------1 分

$=b^2-2b-(b+1)b+b^2=b^2-3b=0$

解得 $b=0,b=3$（满足 $\Delta>0$）.

所以直线 AB 的方程为 $y=-x$ 或 $y=-x+3$.　　--------2 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！