房山区2022—2023学年度第一学期诊断性评价

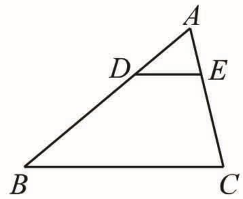
九 年 级 数 学

2022.12

一、选择题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

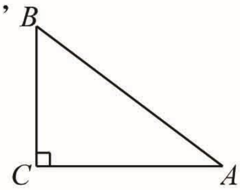
下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

1. 如图，在△ ABC 中，$DE // BC$，如果 $AD=3$，$BD=6$，$AE=2$，那么 AC 的值为



（A）4　　（B）6　　（C）8　　（D）9

2. 如图，在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，如果 $AC=4$，$BC=3$，那么 $\cos A$ 的值为



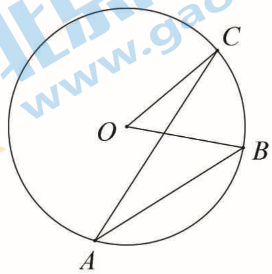
（A）$\frac{4}{5}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{4}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

3. 把二次函数 $y=x^2-2x+4$ 变形为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，下列变形正确的是

（A）$y=(x+1)^2+3$　　（B）$y=(x-2)^2+3$

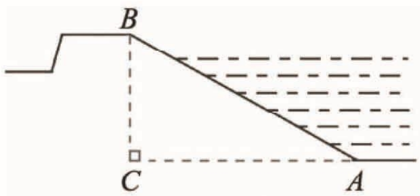
（C）$y=(x-1)^2+5$　　（D）$y=(x-1)^2+3$

4. 如图，A，B，C 是⊙O 上的三个点，如果 $\angle BAC=25°$，那么 $\angle BOC$ 的度数是



（A）35°　　（B）45°　　（C）50°　　（D）60°

5. 河堤的横断面如图所示，堤高 BC 为 5 m，迎水坡 AB 的长是 13 m，那么斜坡 AB 的坡度 i 是



（A）1∶3　　（B）1∶2.6

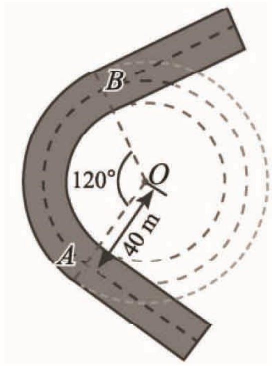
（C）1∶2.4　　（D）1∶2

6. 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上的两点，如果 $x_1<x_2<0$，那么 y_1，y_2 的大小关系是

（A）$y_1<y_2<0$　　（B）$y_2<y_1<0$

（C）$y_1>y_2>0$　　（D）$y_2>y_1>0$

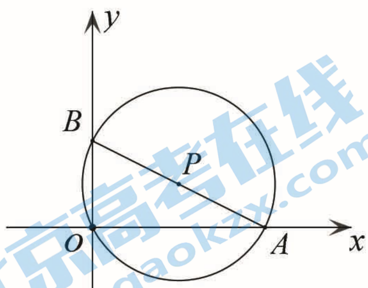
7. 道路施工部门在铺设如图所示的管道时，需要先按照其中心线计算长度后再备料. 图中的管道中心线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为（单位：m）



（A）$\frac{40\pi}{3}$　　（B）$\frac{80\pi}{3}$

（C）$\frac{1600\pi}{3}$　　（D）$\frac{3200\pi}{3}$

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A，B 两点同时从原点 O 出发，点 A 以每秒 2 个单位长的速度沿 x 轴的正方向运动，点 B 以每秒 1 个单位长的速度沿 y 轴的正方向运动，设运动时间为 t 秒，以 AB 为直径作圆，圆心为点 P. 在运动的过程中有如下 5 个结论：



①$\angle ABO$ 的大小始终不变；

②$\odot P$ 始终经过原点 O；

③半径 AP 的长是时间 t 的一次函数；

④圆心 P 的运动轨迹是一条抛物线；

⑤AB 始终平行于直线 $y=-\frac{1}{2}x$.

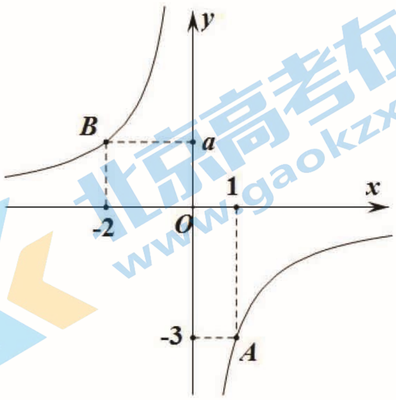
其中正确的有

（A）①②③④　　（B）①②⑤　　（C）②③⑤　　（D）①②③⑤

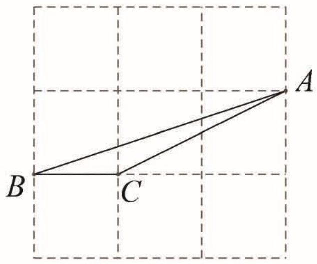
二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9. 二次函数 $y=(x+1)^2-2$ 图象的顶点坐标为____________.

10. 如图，平面直角坐标系中，若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象过点 A 和点 B，则 a 的值为____________.



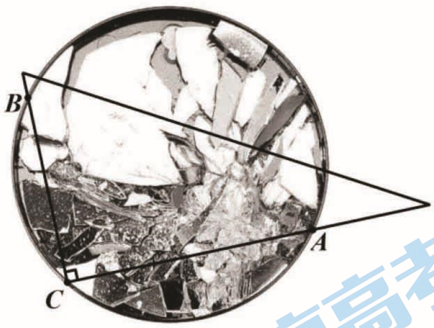
（第 10 题图）



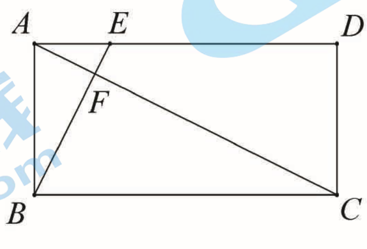
（第 11 题图）

11. 在正方形网格中，$\triangle ABC$ 的位置如图所示，则 $\sin\angle ABC$ 为____________.

12. 平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-2x+m$ 与 x 轴只有一个交点，则 m 的值为____________.



（第 13 题图）



（第 14 题图）

13. 丽丽的圆形镜子摔碎了，她想买一个同样大小的镜子．为了测算圆形镜子的半径，如图，她将直角三角尺的直角顶点 C 放在破损的圆形镜子的圆框上，两直角边分别与圆框交于 A，B 两点，测得 CA 为 8 cm，CB 为 6 cm，则该圆形镜子的半径是__________ cm．

14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，若 $AB=2$，$BC=4$，且 $\frac{AF}{FC}=\frac{1}{4}$，则 EF 的长为__________．

15. 《九章算术》是中国传统数学重要的著作之一，其中卷九中记载了一个问题："今有勾八步，股十五步，问勾中容圆径几何？"其意思是："今有直角三角形，勾（短直角边）长为 8 步，股（长直角边）长为 15 步，问该直角三角形能容纳的圆（内切圆）的直径是多少步？"根据题意，该内切圆的直径为__________步．

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，以点 $P(t，0)$为圆心，单位长 1 为半径的圆与直线 $y=kx-2$ 相切于点 M，直线 $y=kx-2$ 与 y 轴交于点 N，当 MN 取得最小值时，k 的值为__________．

三、解答题（本题共 12 道小题，共 68 分．17，18，20，21 每题 5 分；其余每题 6 分）

17. 计算：$2\cos 30^\circ+\sqrt{2}\sin 45^\circ-\tan 60^\circ$．

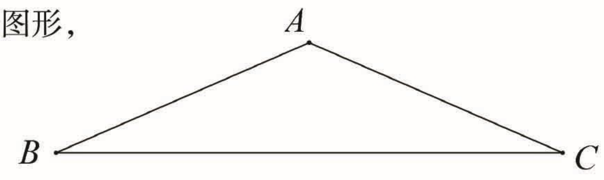
18. 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 过点（0，-3）和（2，1）．

（1）求 b，c 的值；（2）直接写出当 x 取何值时，函数 y 随 x 的增大而增大.

19. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$\sin\angle ABC=\frac{2}{5}$．

（1）求 BC 的长.

（2）BE 是 AC 边上的高，请你补全图形，并求 BE 的长.



密封线内不能答题

学校__________ 班级__________ 姓名__________

密封线内不能答题

20. 下面是晓雨同学设计的“过圆外一点作已知圆的切线”的尺规作图的过程.

已知：如图，⊙O 及⊙O 外一点 P.

求作：过点 P 的⊙O 的切线 PD（D 为切点）.

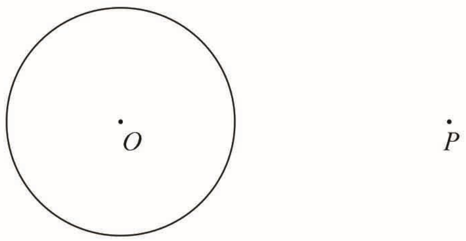
作法：①连接 PO 与⊙O 交于点 A，延长 PO 与⊙O 交于点 B；

②以点 O 为圆心，AB 长为半径作弧；以点 P 为圆心，PO 长为半径作弧，在 PO 上方两弧交于点 C；

③连接 OC，PC，OC 与⊙O 交于点 D；

④作直线 PD.

则直线 PD 即为所求作的⊙O 的切线.



请你根据晓雨同学的作法，完成以下问题：

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成以下证明过程：

证明：由作图可知，$OC=AB$，$PC=PO$，

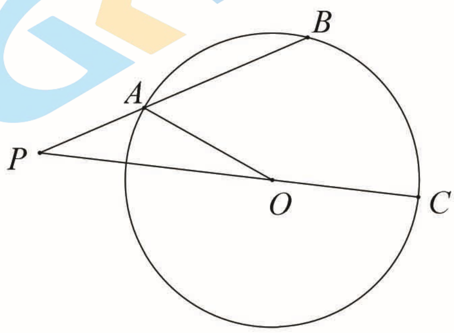
点____为线段 CO 中点，

$\therefore PD\perp OC$（______________________________）

又$\because$点 D 在⊙O 上，

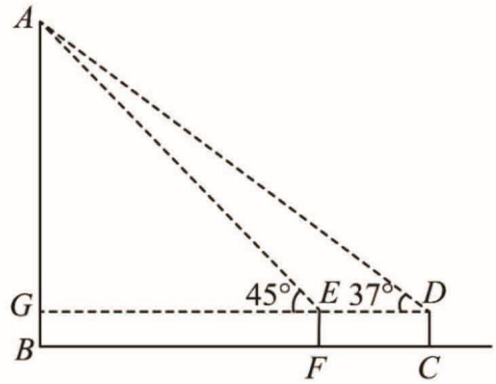
$\therefore PD$ 是⊙O 切线（______________________________）

21. 如图，割线 PB 与⊙O 交于点 A，B，割线 PC 过圆心 O，且$\angle CPB=30°$．若 $PC=13$，⊙O 的半径 $OA=5$，求弦 AB 的长.



22. 中央电视塔是一座现代化的标志性建筑，其外观优美，造型独特，在观光塔上眺望，北京风景尽收眼底. 一次数学活动课上，某校老师带领学生去测量电视塔的高度. 如图，在点 C 处用高 1.5 m 的测角仪 CD 测得塔尖 A 的仰角为 37°，向塔的方向前进 128 m 到达 F 处，在 F 处测得塔尖 A 的仰角为 45°，请你求出中央电视塔 AB 的高度（结果精确到 1 m）.

（参考数据：$\sin 37° \approx \frac{3}{5}, \cos 37° \approx \frac{4}{5}, \tan 37° \approx \frac{3}{4}, \sin 53° \approx \frac{4}{5}, \cos 53° \approx \frac{3}{5}, \tan 53° \approx \frac{4}{3}$.）



23. 在历史的长河中，很多文物难免损耗或破碎断裂，而文物修复师能运用自身拥有的多门学科的专业知识去修复破损的文物，使其重获新生. 如图 23-1，某文物修复师在修复一件破碎的古代瓷器束口盏（盏口原貌为圆形）的时候，仅凭一块碎片就初步推算出了该文物原貌口径的尺寸. 如图 23-2 是文物修复师根据碎片的切面画出的几何图形. 碎片的边缘是圆弧，表示为弧 AB，测得弧所对的弦长 AB 为 12.8 cm，弧中点到弦的距离为 2 cm. 设弧 AB 所在圆的圆心为 O，半径 $OC \perp AB$ 于 D，连接 OB. 求这个盏口半径 OB 的长（精确到 0.1cm）.

图 23-1

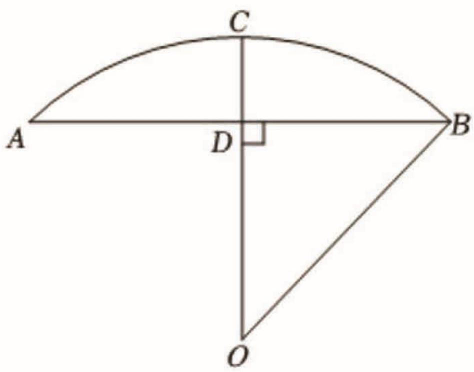


图 23-2

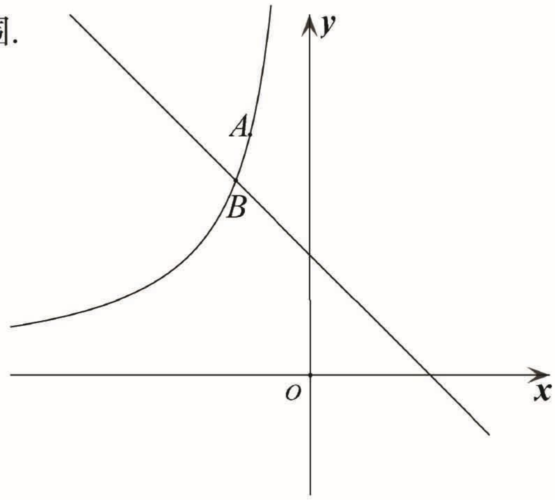
24. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(x<0)$ 的图象经过点 $A(-1，4)$，一次函数 $y=-x+2$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(x<0)$ 的图象交于点 B.

（1）求 m 的值；

（2）点 $C(x_C，y_C)$ 是 $y=\dfrac{m}{x}(x<0)$ 图象上任意一点，过点 C 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 D，过点 C 作 x 轴的垂线交直线 $y=-x+2$ 于点 E.

①当 $x_C=-2$ 时，判断 CD 与 CE 的数量关系，并说明理由；

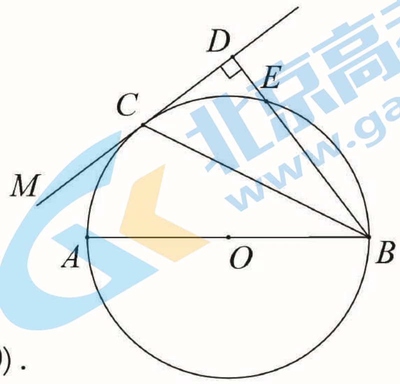
②当 $CE\geqslant CD$ 时，直接写出 x_C 的取值范围.



25. 如图，AB 是⊙O 的直径，直线 MC 与⊙O 相切于点 C. 过点 B 作 $BD\perp MC$ 于 D，线段 BD 与⊙O 相交于点 E.

（1）求证：BC 是 $\angle ABD$ 的平分线；

（2）若 $AB=10$，$BE=6$，求 BC 的长.



26. 在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2-4ax+3\ (a\neq 0)$.

（1）求抛物线的对称轴；

（2）抛物线上存在两点 $A(2-t，y_1)$，$B(2+2t，y_2)$，若 $y_1>y_2$，请判断此时抛物线有最高点还是最低点，并说明理由；

（3）在（2）的条件下，抛物线上有三点 $(1，m)$，$(2，n)$，$(5，p)$，当 $mnp\geqslant 0$ 时，求 a 的取值范围.

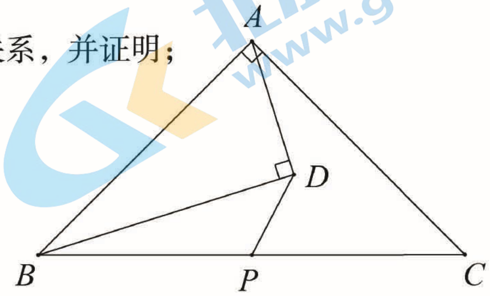
27. 已知$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，$AB=2$．点D为平面上一点，使得$\angle BDA=90°$．点P为BC中点，连接DP．

（1）如图，点D为$\triangle ABC$内一点

①猜想$\angle BDP$的大小；

②写出线段AD，BD，PD之间的数量关系，并证明；

（2）直接写出线段CD的最大值.



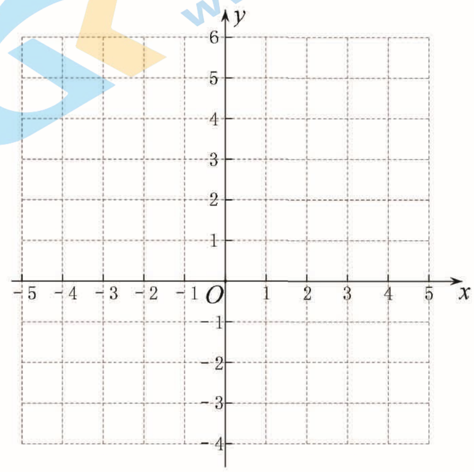
28. 在平面直角坐标系xOy中，已知一条开口向上的抛物线，连接此抛物线上关于对称轴对称的两点A，B（A点在B点左侧），以AB为直径作$\odot M$．取线段AB下方的抛物线部分和线段AB上方的圆弧部分（含端点A，B），组成一个封闭图形，我们称这种图形为“抛物圆”，其中线段AB叫做“横径”，线段AB的垂直平分线被“抛物圆”截得的线段叫做“纵径”，规定“纵径”长度和“横径”长度的比值叫做此“抛物圆”的“扁度”．

（1）已知抛物线$y=x^2$．

①若点A横坐标为-2，则得到的“抛物圆”的“横径”长为__________，“纵径”长为__________；

②若点A横坐标为t，用t表示此“抛物圆”的“纵径”长，并求出当它的“扁度”为2时t的值；

（2）已知抛物线$y=x^2-2ax+a^2+a$，若点A在直线$y=-4ax+a$上，求“抛物圆”的“扁度”不超过3时a的取值范围.



密封线内不能答题

房山区 2022-2023 学年度第一学期诊断性评价
九年级数学参考答案

一、 选择题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	C	C	B	B	D

二、选择题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9	10	11	12	13	14	15	16
（−1，−2）	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	1	5	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	6	$\pm\sqrt{3}$

三、解答题（本题共 68 分，17，18，20，21 每题 5 分；其余每题 6 分）

17. 解：原式 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$ ……3 分

$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}$ ……4 分

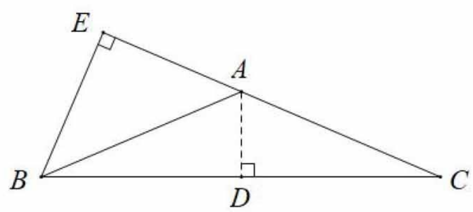
$=1$ ……5 分

18. 解：（1） $\begin{cases} c=-3 \\ -4+2b+c=1 \end{cases}$ ……2 分

解得 $\begin{cases} c=-3 \\ b=4 \end{cases}$ ……3 分

（2） $x<2$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大 ……5 分

19．解： （1）过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D ……1 分



$\therefore \sin\angle ABC=\frac{AD}{AB}$

$\therefore AD=AB\cdot\sin\angle ABC=5\times\frac{2}{5}=2$ ……2 分

$BD=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

$\because AB=AC$

$\therefore BC=2BD=2\sqrt{21}$ ……3 分

（2）补全图形 ……………………4 分

∵$AB=AC$

∴$\angle ACB=\angle ABC$ ……………………5 分

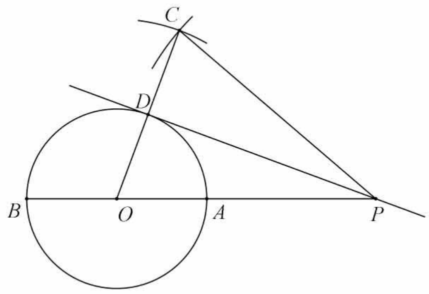
∴$\sin\angle ACB=\sin\angle ABC=\dfrac{2}{5}$

∵$BE\perp AC$ 于 E

∴$\sin\angle ECB=\dfrac{BE}{BC}$

∴$BE=BC\cdot\sin\angle ECB=2\sqrt{21}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4\sqrt{21}}{5}$ ……………………6 分

20．（1）补全图形 ……………………2 分



（2）点 <u>D</u> 为线段 CO 中点， ……………………3 分

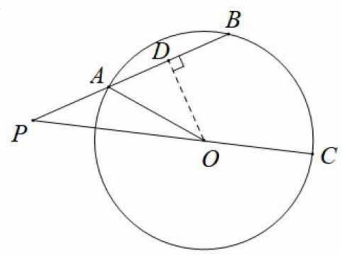
∴$PD\perp OC$，（<u>等腰三角形底边高与底边中线互相重合</u>）………………4 分

又∵点 D 在⊙O 上，

∴PD 是⊙O 切线（<u>经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线</u>）

………………5 分

21．解：过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D ……………………1 分



∴$AB=2AD$ ……………………2 分

∵$PC=13$，⊙O 的半径 $OC=OA=5$

∴$PO=13-5=8$

∵$\angle CPB=30°$

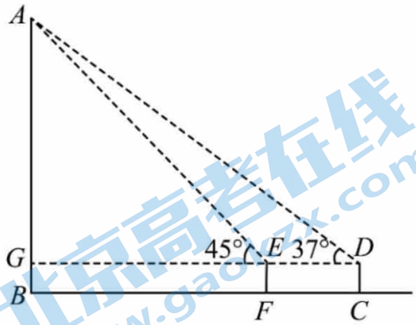
∴$OD=\dfrac{1}{2}PO=\dfrac{1}{2}\times 8=4$ ……………………3 分

∴$AD=\sqrt{5^2-4^2}=3$ ……………………4 分

∴$AB=2\times 3=6$ ……………………5 分

22．解：由题意得，

$BG = CD = 1.5$ m，$DE = CF = 128$ m ……………………1 分



∵Rt△AGE 中，$\angle AEG = \angle EAG = 45°$

∴ $AG = EG$ ……………………2 分

设 $AG = EG = x$

在 Rt△AGD 中，$\tan\angle ADG = \dfrac{AG}{DG}$ ……………………3 分

则 $AG = DG \cdot \tan\angle ADG = DG \cdot \tan 37°$

∴ $x = \dfrac{3}{4}(x + 128)$ ……………………4 分

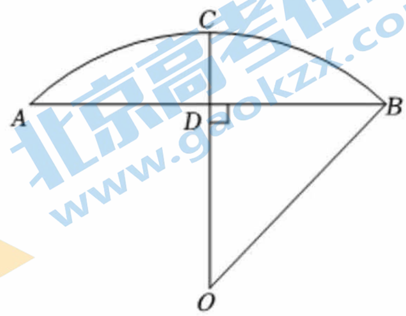
解得：$x = 384$ ……………………5 分

则 $AB = 384 + 1.5 = 385.5 \approx 386$（m）

答：中央电视塔 AB 的高度为 386 m . ……………………6 分

注：其它解法参照给分

23．解：∵⊙O 中，半径 $OC \perp AB$ 于 D



∴ $BD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 12.8 = 6.4$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

……………………2 分

∵弧中点到弦的距离为 2 cm

∴$CD = 2$ cm ……………………3 分

设⊙O 半径为 R，则 $OD = OC - CD = R - 2$

在 Rt△OBD 中，由勾股定理得：$OB^2 = BD^2 + OD^2$

即 $R^2 = 6.4^2 + (R-2)^2$ ……………………5 分

解得：$R = 11.24$　　即 $OB = 11.24 \approx 11.2$（cm）

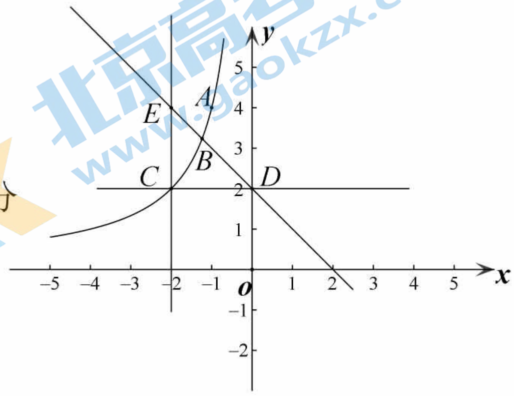
答：盏口半径 OB 的长为 11. 2 cm. ……………………6 分

24. （1）将 A（-1，4）代入 $y=\dfrac{m}{x}(x<0)$ 中，

$m=-1\times4=-4$

即 m 值为 -4 ……………………1 分

（2）①猜想：$CD=CE$ ……………………2 分



证明：∵反比例函数为 $y=-\dfrac{4}{x}(x<0)$

∴点 C（-2，2） 得 D（0，2）

∴$CD=2$ ……………………3 分

将 $x=-2$ 代入 $y=-x+2$ 中得 $y=4$，

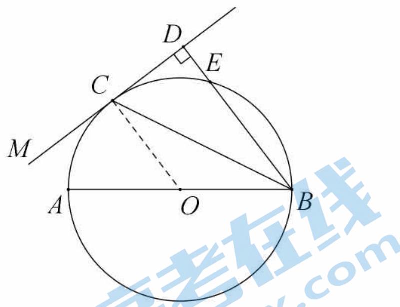
∴点 E（-2，4）

∴$CE=2$ ……………………4 分

∴$CD=CE$

② $x\leqslant-2$ 或 $-1\leqslant x<0$ ……………………6 分

25. （1）证明：连接 OC



∵直线 MC 与⊙O 相切于点 C

∴$OC\perp MD$ ……………………1 分

∵$BD\perp MC$

∴$OC// BD$

∴$\angle OCB=\angle CBD$ ……………………2 分

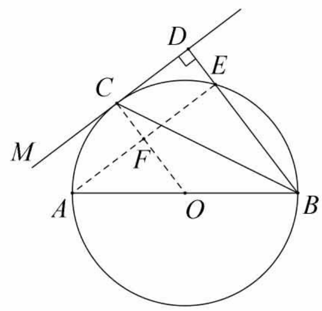
∵$OC=OB$

∴$\angle OCB=\angle OBC$

∴$\angle CBD=\angle OBC$

∴BC 是 $\angle ABD$ 的平分线 ……………………3 分

（2）连接 AE，与 OC 交于点 F ……………………4 分



∵AB 是⊙O 的直径，点 E 在⊙O 上

∴$\angle AEB=90°$

∵$AB=10$，$BE=6$

∴在 Rt△ABE 中，由勾股定理得 $AE=8$ ……………………5 分

∵$OC \parallel BD$，$\angle AEB=90^\circ$

∴$OC \perp AE$

∴$FE=\frac{1}{2}AE=4$，OF 为$\triangle ABE$ 的中位线

∴$OF=\frac{1}{2}BE=3$，$CF=OC-OF=5-3=2$

∵$BD\perp MD$，$OC\perp MD$，$\angle AEB=90^\circ$

可得四边形 $CDEF$ 是矩形

∴$CD=FE=4$，$DE=CF=2$

∴$BD=6+2=8$

∴在 Rt$\triangle CDB$ 中，由勾股定理可得 $CB=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$ ……………………6 分

注：其它解法参照给分

26.（1）此抛物线对称轴为：$x=-\frac{-4a}{2a}=2$ ……………………1 分

（2）判断：此抛物线有最高点. ……………………2 分

理由如下：由 $y_1>y_2$ 可知，$t\neq 0$.

点 A（$2-t$，y_1）到对称轴 $x=2$ 的距离为$|t|$，

点 B（$2+2t$，y_2）到对称轴 $x=2$ 的距离为$|2t|$，

∴点 A 到对称轴的距离比点 B 近 ……………………3 分

∵$y_1>y_2$

∴此抛物线开口向下 ……………………4 分

∴此抛物线有最高点.

（3）在（2）的前提下，$a<0$ ……………………5 分

由表达式可知点（0，3）在抛物线上

点（5，p）关于对称轴的对称点为（-1，p）

∴（-1，p），（0，3），（1，m），（2，n）这四个点都在抛物线左半支上

∵$-1<0<1<2$，y 随 x 的增大而增大

所以 $p<3<m<n$，

根据 $mnp\geq 0$，得到 $p\geq 0$

把 $x=-1$ 代入表达式，得 $a+4a+3\geq 0$，解得 $a\geq -\frac{3}{5}$

∵ $a<0$

∴ a 的取值范围为 $-\frac{3}{5} \leqslant a<0$. ························6 分

注：其它解法参照给分

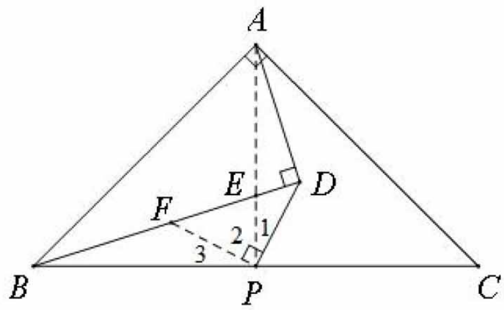
27.（1）①猜想：$\angle BDP=45^\circ$ ························1 分

②数量关系：$BD=AD+\sqrt{2}PD$ ························2 分

证明：如图，连接 AP 交 BD 于点 E. ························3 分

∵$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，点 P 为 BC 中点，

∴$AP\perp BC$，$AP=BP=\frac{1}{2}BC$，$\angle BAP=45^\circ$



∵$\angle BDA=90^\circ$ 又$\angle BEP=\angle AED$

∴$\triangle BEP\backsim\triangle AED$，

∴$\frac{BE}{EP}=\frac{AE}{ED}$

又∵$\angle BEA=\angle PED$

∴$\triangle ABE\backsim\triangle DPE$，

∴$\angle BDP=\angle BAP=45^\circ$

过点 P 作 $PF\perp PD$ 交 BD 于点 F

∴$PF=PD$，$\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$FD=\sqrt{2}DP$

∵$AP\perp BC$，

∴$\angle 2+\angle 3=90^\circ$

∴$\angle 3=\angle 1$

∴$\triangle BFP\cong\triangle ADP$， ························4 分

∴$BF=AD$

∵$BD=BF+FD$

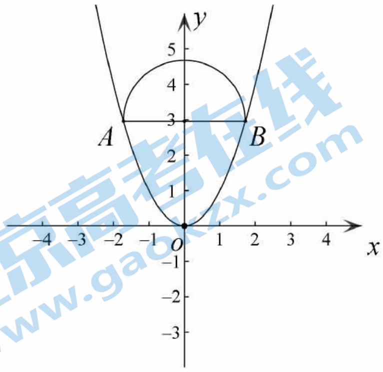
∴$BD=AD+\sqrt{2}PD$ ························5 分

注：其它解法参照给分

（2）CD 的最大值为 $\sqrt{5}+1$ ························6 分

28.（1）①“横径”长为 4，“纵径”长为 6 ························2 分

②∵抛物线 $y=x^2$，点 A 横坐标为 t



∴点 A（t，t^2），点 B（$-t$，t^2）（$t<0$）

∴此时横径长为 $-2t$，纵径长为 t^2-t， ························3 分

$$扁度=\frac{纵径}{横径}=\frac{t^2-t}{-2t}=\frac{1-t}{2}$$

∵扁度为 2

∴ $\frac{1-t}{2}=2$ 得 $t=-3$ ························4 分

（2）点 A 既在抛物线 $y=x^2-2ax+a^2+a$ 上，又在直线 $y=-4ax+a$ 上

解 $\begin{cases} y=-4ax+a \\ y=x^2-2ax+a^2+a \end{cases}$

得 $x_1=x_2=-a$

∴点 A 坐标为（$-a$，$4a^2+a$） ························5 分

又抛物线 $y=x^2-2ax+a^2+a$ 的顶点为（a，a），点 A 在对称轴左侧

∴ $-a<a$ 得 $a>0$

由点 A 坐标得点 B 坐标为（$3a$，$4a^2+a$）

∴横径为 $4a$，纵径为 $4a^2+2a$

得 $扁度=\frac{纵径}{横径}=\frac{4a^2+2a}{4a}=\frac{2a+1}{2}$

∵“抛物圆”的“扁度”不超过 3

∴ $\frac{2a+1}{2}\leqslant 3$，解得 $a\leqslant\frac{5}{2}$

∵ $a>0$

∴ $0<a\leqslant\frac{5}{2}$ ························6 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承‘’精益求精、专业严谨‘’的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。