东城区 2021—2022 学年度第一学期期末统一检测

高 三 数 学

2022.1

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $A\cap B=$

(A)$\{0,1\}$　　(B)$\{-1,0,1\}$　　(C)$\{0,1,2\}$　　(D)$\{-1,0,1,2\}$

(2)下列函数中，既是奇函数又是增函数的为

(A)$f(x)=\ln x$　　(B)$f(x)=2^x$　　(C)$f(x)=x^3$　　(D)$f(x)=\sin x$

(3)在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_3^2=16a_2$，则 $a_4=$

(A)32　　(B)16　　(C)8　　(D)4

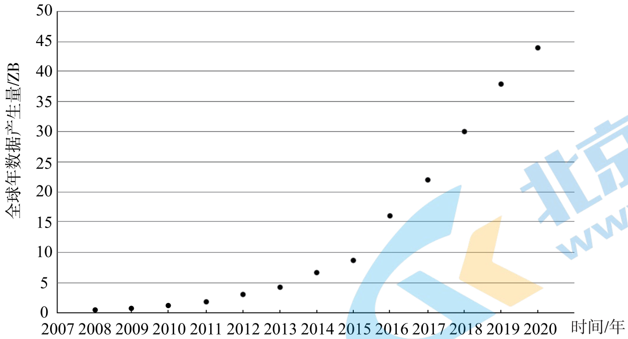
(4)在二项式$(x-\frac{2}{x})^5$ 的展开式中，含 x^3 项的系数为

(A)5　　(B)-5　　(C)10　　(D)-10

(5)在平面直角坐标系中，角 α 的终边过点$(-1,0)$，将 α 的终边绕原点按逆时针方向旋转 $120°$与角 β 的终边重合，则 $\cos\beta=$

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)$-\frac{1}{2}$　　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6)人类已进入大数据时代. 目前，全球年数据产生量已经从 TB 级别跃升到 PB，EB 乃至 ZB 级别(1 TB=1024 GB，1 PB=1024 TB，1 EB=1024 PB，1 ZB=1024 EB). 由国际数据公司 IDC 的研究结果得到 2008 年至 2020 年全球年数据产生量(单位:ZB)的散点图.



根据散点图，下面四个选项中最适宜刻画 2008 年至 2020 年全球年数据产生量 y 和时间 x 的函数模型是

(A) $y=a+bx$　　(B) $y=a+b\sqrt{x}$　　(C) $y=a+b\ln x$　　(D) $y=a+be^{x}$

(7)已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为 C 上一点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 M. 若 $|MF|=|PF|$，则 $|PM|=$

(A) 2　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 4　　(D) $2\sqrt{3}$

(8)已知直线 l：$y=mx-m-1$，P 为圆 C：$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 上一动点，设 P 到直线 l 距离的最大值为 $d(m)$，当 $d(m)$ 最大时，m 的值为

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) 2

(9)已知点 A,B,C 不共线，λ,μ 为实数，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则“$0<\lambda+\mu<1$”是“点 P 在 $\triangle ABC$ 内(不含边界)”的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(10)已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列，且 $a_1=3$，$a_7=8$，对 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，$a_{k+1}=a_k+1$ 与 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k+2}$ 有且仅有一个成立，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7$ 的最小值为

(A) 18　　(B) 20　　(C) 21　　(D) 23

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)在复平面内，复数 z 对应点的坐标是$(-1,2)$，则 $\bar{z}=$________.

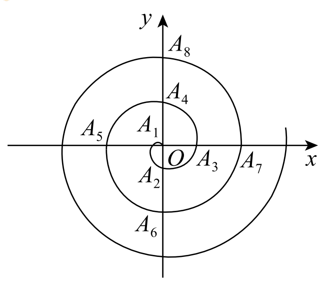
(12)已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的两条渐近线互相垂直，则 $b=$________；C 的离心率为________.

(13)已知 l,m 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面. 写出以 l,m,α,β 之间的部分位置关系为条件($l\perp\alpha$ 除外)，$l\perp\alpha$ 为结论的一个真命题：________________________.

(14)函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$的非负零点按照从小到大的顺序分别记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$.

若 $x_3-x_2=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$________；$x_{21}=$________.

(15)阿基米德螺线广泛存在于自然界中，具有重要作用. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，螺线与坐标轴依次交于点 $A_1(-1,0)$，$A_2(0,-2)$，$A_3(3,0)$，$A_4(0,4)$，$A_5(-5,0)$，$A_6(0,-6)$，$A_7(7,0)$，$A_8(0,8)$，并按这样的规律继续下去. 给出下列四个结论：



①对于任意正整数 n，$|A_nA_{n+4}|=4$；

②存在正整数 n，$|A_nA_{n+1}|$为整数；

③存在正整数 n，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 的面积为 2022；

④对于任意正整数 n，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 为锐角三角形.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

在$\triangle ABC$中，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(Ⅰ)求证：$\triangle ABC$为等腰三角形；

(Ⅱ)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一，求b的值.

条件①：$\angle B=\dfrac{\pi}{6}$；

条件②：$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{15}{2}$；

条件③：AB边上的高为 3.

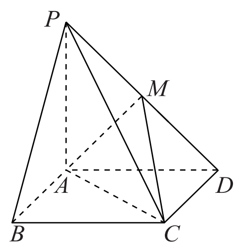
注：如果选择的条件不符合要求，第(Ⅱ)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(17)(本小题 14 分)

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB$，M为线段PD上的动点.

(Ⅰ)若直线$PB//$平面ACM，求证：M为PD的中点；

(Ⅱ)若平面PAC与平面MAC夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求$\dfrac{PM}{MD}$的值.



(18)(本小题 13 分)

2020 年 9 月 22 日,中国政府在第七十五届联合国大会上提出:“中国将提高国家自主贡献力度,采取更加有力的政策和措施,二氧化碳排放力争于 2030 年前达到峰值,努力争取 2060 年前实现碳中和.”做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废弃物造成的二氧化碳、甲烷等温室气体的排放,助力碳中和.某校环保社团为了解本校学生是否清楚垃圾分类后的处理方式,随机抽取了 200 名学生进行调查,样本调查结果如下表:

	高中部		初中部	
	男生	女生	男生	女生
清楚	12	8	24	24
不清楚	28	32	38	34

假设每位学生是否清楚垃圾分类后的处理方式相互独立.

(Ⅰ)从该校学生中随机抽取一人,估计该学生清楚垃圾分类后处理方式的概率;

(Ⅱ)从样本高中部和初中部的学生中各随机抽取一名学生,以 X 表示这 2 人中清楚垃圾分类后处理方式的人数,求 X 的分布列和数学期望;

(Ⅲ)从样本中随机抽取一名男生和一名女生,用“$\xi=1$”表示该男生清楚垃圾分类后的处理方式,用“$\xi=0$”表示该男生不清楚垃圾分类后的处理方式,用“$\eta=1$”表示该女生清楚垃圾分类后的处理方式,用“$\eta=0$”表示该女生不清楚垃圾分类后的处理方式.直接写出方差 $D\xi$ 和 $D\eta$ 的大小关系.(结论不要求证明)

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-\sqrt{3},0)$,其右焦点为 $F(1,0)$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)设 P 为椭圆 C 上一动点(不在 x 轴上),M 为 AP 中点,过原点 O 作 AP 的平行线,与直线 $x=3$ 交于点 Q. 问:直线 OM 与 FQ 斜率的乘积是否为定值?若为定值,求出该值;若不为定值,请说明理由.

(20)(本小题 15 分)

曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(t,\ln t)$ 处的切线 l 交 x 轴于点 M.

(Ⅰ)当 $t=\mathrm{e}$ 时,求切线 l 的方程;

(Ⅱ)O 为坐标原点,记$\triangle AMO$ 的面积为 S. 求面积 S 以 t 为自变量的函数解析式,写出其定义域,并求单调增区间.

(21)(本小题 15 分)

对于给定的正整数 m 和实数 a,若数列$\{a_n\}$满足如下两个性质:

①$a_1+a_2+\cdots+a_m=a$; ②对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$a_{n+m}=a_n$,则称数列$\{a_n\}$具有性质 $P_m(a)$.

(Ⅰ)若数列$\{a_n\}$具有性质 $P_2(1)$,求数列$\{a_n\}$的前 10 项和;

(Ⅱ)对于给定的正奇数 t,若数列$\{a_n\}$同时具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅲ)若数列$\{a_n\}$具有性质 $P_m(a)$,求证:存在自然数 N,对任意的正整数 k,不等式 $\frac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\frac{a}{m}$ 均成立.

(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)