2021 北京十九中高一（下）期末

数　学

2021－7

考试时间：90 分钟　满分：100 分

一、选择题（本题共 10 题，每题 4 分，共 40 分）

1. $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ =$（　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.已知复数 $z_1 = 2+i, z_2 = 1+bi, b\in \mathbf{R}$，若 z_1z_2 是纯虚数，则 b=（　）

A.2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D.－2

3.在△ABC 中，∠A，∠B，∠C 所对的边分别为 a，b，c，如果 $a\cos B= b\cos A$，那么三角形 ABC 一定是（　）

A.锐角三角形 B．钝角三角形 C．直角三角形 D．等腰三角形

4.已知 $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$，则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=$（　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B.3　　C.－3　　D. $-\dfrac{1}{3}$

5.在平行四边形 $ABCD$ 中，M 是 DC 的中点，向量 $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NB}$，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{MN}=$（　）

A. $\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$　　B. $-\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　C. $\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{7}{6}\vec{b}$　　D. $\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

6.在△ABC 中，a=3，A=30°，则 b 的取值范围（　）

A. $(0,\sqrt{3}]$　　B. $(0,2\sqrt{3}]$　　C. $(0,3\sqrt{2}]$　　D. $(0,6]$

7.已知函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则下列结论错误的是（　）

A. f（x）的最小正周期为 2π　　B. f（x）的图象关于直线 $x=\dfrac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\dfrac{\pi}{6}$　　D. f（x）在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减

8.下列说法中正确的为（　）

A.已知 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(1,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 的夹角为锐角，则实数 λ 的取值范围是 $\left(-\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

B.已知 *A*，*B*，*C* 三点在一条直线上，且 *A*（3，－6），*B*（－5，2），若点 *C* 的横坐标为 6，则点 *C* 的纵坐标为－9

C.若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $|\vec{a}|$

D.非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 60°

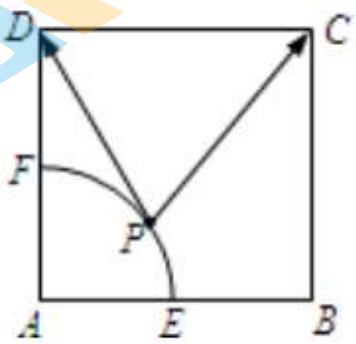
9.在△*ABC* 中，“sin*A*＞cos*B*”是“△*ABC* 为锐角三角形”的（　）

A.充分不必要条件　　*B*.必要不充分条件

C.充要条件　　*D*.既不充分也不必要条件

10.如图，已知正方形 *ABCD* 的边长为 2，点 *E* 为 *AB* 的中点．以 *A* 为圆心，*AE* 为半径，作弧交 *AD* 于点 *F*．若 *P* 为劣弧 $\overset{\frown}{EF}$ 上的动点，则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最小值为（　）

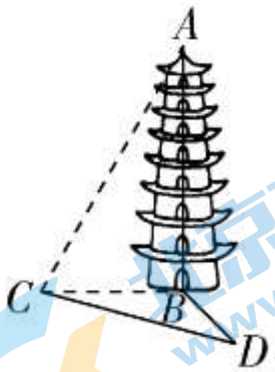
A.5　　B.$2\sqrt{5}$　　C.$5-2\sqrt{5}$　　D.$2+2\sqrt{5}$



二、填空题（本题共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

11.若复数 $Z=\dfrac{1-2i}{1-i}$，则 *z* 在复平面内对应的点在第____象限，$\mathrm{Im}(z)=$____，$|z|=$____，$\bar{z}=$____.

12.如图，测量河对岸的塔高 *AB* 时，可以选与塔底 *B* 在同一水平面内的两个测点 *C* 与 *D*，测得∠*BCD*＝15°，∠*BDC*＝30°，*CD*＝30m，并在点 *C* 测得塔顶 *A* 的仰角∠*ACB*＝60°，则塔高 *AB*＝___m.



13.已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}|$ 的夹角为 60°，$|\vec{a}|=2$ $|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$___.

14.已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2\cos\theta,-1),\overrightarrow{AC}=(\sin\theta,\cos\theta),\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，则角 $\theta=$____.

15.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x-\varphi)-\cos(2x-\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于 y 轴对称，则 f（x）在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 上的最大值为____.

三、解答题（本题共 4 题，共 40 分）

16.（本题 9 分）在△ABC 中，已知 b＝5，cos$B$＝$\dfrac{9}{16}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知条件①：$\cos C=\dfrac{1}{8}$；条件②：a＝4

（1）求 sin$A$；

（2）求△ABC 的面积.

17.（本题 9 分）已知向量 $\vec{m}=(\sin A,\cos A),\vec{n}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{n}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{m}\cdot\vec{n}=1,$ 且 A 为锐角.

（1）求角 A 的大小；

（2）求函数 $f(x)=\cos 2x+4\cos A\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的值域.

18.（本题 9 分）在△ABC 中，设内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$2\sqrt{2}a\cos B=b\sin A$.

（1）求 cos$B$；

（2）若 c＝3，AC 边上的中线 BD 长为 $\sqrt{3}$，求 a.

19.（本题 13 分）已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\cos^2\dfrac{x}{4}$.

（1）求 f（x）的单调递减区间；

（2）若 $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}$，求 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$ 的值；

（3）将 y=f（x）的图象向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位得到 y=g（x）的图象，若函数 $y=g(x)-k$ 在 $\left[0,\dfrac{7\pi}{3}\right]$ 上有唯一零点，求实数 k 的取值范围.

2021 北京十九中高一（下）期末数学

参考答案

一、选择题（共 10 题，共 40 分，每题 4 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	*B*	*A*	*D*	*D*	*A*	*D*	*D*	*B*	*B*	*C*

二、填空题（共 5 题，共 20 分，每题 4 分）

11.四，$-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$．　　12.$15\sqrt{6}$;　13.$2\sqrt{3}$;　14.$\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{6}$；　15.$\sqrt{3}$.

三、解答题（共 4 题，共 40 分）

16.【答案】本题 9 分（选①第一问 5 分，第二问 4 分：选②第一问 4 分，第二问 5 分）

解①：（1）因为$\cos B=\frac{9}{16},\cos C=\frac{1}{8}$，$C\in(0,\pi)$，所以$\sin B=\frac{5\sqrt{7}}{16},\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，………………2 分

所以$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{1}{8}+\frac{9}{16}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$………………4 分

所以$\sin A=\sin(B+C)=\frac{\sqrt{7}}{4}$………………5 分

（2）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$………………6 分

得$a=\frac{b}{\sin B}\sin A=4$，………………7 分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$,………………9 分

解②：（1）由$\cos B=\frac{9}{16},B\in(0,\pi)$，

得$\sin B=\frac{5\sqrt{7}}{16}$………………2 分

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$………………3 分

得 $\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$………………4 分

（2）由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $25=16+c^2-2\times4\times c\times\frac{9}{16}$. …………6 分

即 $2c^2-9c-18=0$，

解得 $c=6$（$c=-\frac{3}{2}$ 舍）………………7 分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$. ………………9 分

17.【答案】本题 9 分（第一问 3 分，第二问 6 分）

解：（1）向量 $\vec{m}=(\sin A,\cos A)$，$\vec{n}=(\sqrt{3},-1)$，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，……2 分

由于 A 为锐角，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$………………3 分

（2）$f(x)=\cos2x+4\cos A\sin x$

$=\cos2x+2\sin x$………………4 分

$=1-2\sin^2x+2\sin x$………………5 分

$=-2\left(\sin^2x-\sin x\right)+1$

$=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$，………………6 分

当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，f（x）有最大值为 $\frac{3}{2}$；…………7 分

当 $\sin x=-1$ 时，f（x）有最小值为－3，………………8 分

所以函数的值域为 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$. ………………9 分

18.本题 9 分【答案】（第一问 4 分，第二问 5 分）

解：（1）$\sqrt{2}a\cos B=b\sin A$. 由正弦定理可得：

$2\sqrt{2}\sin A\cos B=\sin B\sin A$，………………1 分

$\because\sin A\neq0$,

$\therefore 2\sqrt{2}\cos B=\sin B$, ………………2 分

$\therefore\cos B>0$,

$\because\sin^2B+\cos^2B=1$,

$\therefore 8\cos^2 B+\cos^2 B=1$，………………3 分

即 $\cos^2 B=\dfrac{1}{9}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{3}$． …………4 分

（2）在△ABD 中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB$

即 $9=3+\dfrac{1}{4}b^2-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}b\cos\angle ADB$

整理可得 $6=\dfrac{1}{4}b^2-\sqrt{3}b\cos\angle ADB$，①………………5 分

在△BDC 中，$BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cos\angle BDC$

即 $a^2=3+\dfrac{1}{4}b^2-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}b\cos\angle BDC$,

整理可得 $a^2-3=\dfrac{1}{4}b^2+\sqrt{3}b\cos\angle ADB$，②，………………6 分

由①+②，可得 $a^2+3=\dfrac{1}{2}b^2$………………7 分

在△ABC 中，$b^2=a^2+c^2-2a\cos B=a^2+9-2a$

即 $b^2=a^2+9-2a$，

$\therefore 2a^2+6=a^2+9-2a$，………………8 分

整理可得 $a^2+2a-3=0$，解得 $a=-3$（舍去）或 $a=1$，故 $a=1$…………9 分

19.【答案】本题 13 分（第一问 5 分，第二问 3 分，第三问 5 分）

解：（1）由于 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\cos^2\dfrac{x}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$， …………3 分

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in Z)$，………………4 分

整理得 $\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi\le x\le 4k\pi+\dfrac{8\pi}{3}(k\in Z)$，

所以函数的单调递减区间为 $\left[\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi,4k\pi+\dfrac{8\pi}{3}\right](k\in Z)$． ………………5 分

（2）由于 $f(\alpha)=\frac{3}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

则 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$, ………………6 分

解得 $\alpha=4k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$，………………7 分

则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-4k\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos(-4k\pi)=1(k\in Z)$． ………………8 分

（3）函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位得到 $y=g(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$ 的图象，…………9 分

由于 $x\in\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$，所以 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$，

所以函数 $y=g(x)-k$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 上有唯一零 x 点，

即 $y=k$ 与函数 $y=g(x)$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 上只有一个交点，………………10 分

所以当 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right)$ 或 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，

直线 $y=k$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象只有一个交点，

当 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right)$ 即 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$g(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$；…………11 分

当 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{4\pi}{3}$ 时 $g(x)=\frac{3}{2}$，………………12 分

所以 $0\le k<\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$ 时，数 $y=g(x)-k$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 上有唯一零点…………13 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。