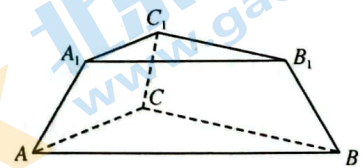


8. 若 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, $f'(x)$ 为其导函数, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) + 3f(x) > 0$ 恒成立, 则不等式 $x^3 f(x) + (2x-1)^3 f(1-2x) < 0$ 的解集为
- A. $(\frac{1}{3}, 1)$
 B. $(1, 3)$
 C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
 D. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知曲线 $E: x^2 + xy + y^2 = 4$, 则
- A. E 关于原点对称
 B. E 关于直线 $y=x$ 对称
 C. E 关于 y 轴对称
 D. $(2, -2)$ 为 E 的一个顶点
10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$, $g(x) = \sqrt{2} \cos \omega x$, $\omega > 0$, $\varphi \in [0, \pi)$, 它们的最小正周期均为 π , $f(x) + g(x)$ 的一个零点为 $-\frac{\pi}{6}$, 则
- A. $f(x) + g(x)$ 的最大值为 2
 B. $f(x) + g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称
 C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上均单调递增
 D. 将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到 $g(x)$ 的图象
11. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是 C 上两点, O 为坐标原点, M 为 x 轴正半轴上一点, 过 B 作 C 的准线的垂线, 垂足为 B_1 , AB 的中点为 E , 则
- A. 若 $|AF| = 3$, 则 $\triangle AOF$ 的面积为 $\sqrt{2}$
 B. 若 $|BB_1| = 2|OF|$, 则四边形 $OFBB_1$ 的周长为 $3 + \sqrt{5}$
 C. 若 $|AB| = 6$, 则 E 到 y 轴的最短距离为 3
 D. 若直线 AB 过点 $M(2, 0)$, 则 $\frac{1}{|MA|^2} + \frac{1}{|MB|^2}$ 为定值
12. 如图, 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面的边长分别为 4 和 6, 侧棱长为 2, 以点 A 为球心, $2\sqrt{7}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为曲线 Γ , P 为 Γ 上一点, 则
- A. CP 的最小值为 $2\sqrt{3} - 2$
 B. 存在点 P , 使得 $AP \perp BC$
 C. 存在点 P 及 B_1C_1 上一点 Q , 使得 $AP \parallel A_1Q$
 D. 所有线段 AP 所形成的曲面的面积为 $\frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知平面向量 a, b 满足 $|a| = 2|b| = 2$, $|a-b| = 2$, 则 $\cos \langle a, b \rangle =$ _____.
14. 已知实数 x, y 满足 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 则 $\frac{y}{x+1}$ 的取值范围为 _____.
15. 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 \frac{x}{27}$, 若对不相等的正数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2}$ 的最小值为 _____.
16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以线段 F_1F_2 为直径的圆与 C 在第一、第三象限分别交于点 A, B , 若 $|AF_1| \leq 4|BF_1|$, 则 C 的离心率的取值范围是 _____.

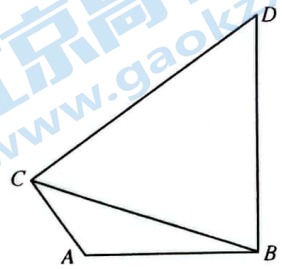
四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=1$,过 B, C 分别作 AB, AC 的垂线交于点 D 。

(1)若 $BD=3$,求 $\cos A$;

(2)若 $\angle D=60^\circ$,求 CD 。



18. (本小题满分 12 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, $\Pi_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, 且 $a_n + \Pi_n = 1$ 。

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $\frac{1}{3} \leq S_n < \frac{3}{4}$ 。

19. (本小题满分 12 分)

已知动点 P 到点 $F(\sqrt{5}, 0)$ 的距离是到直线 $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍, 记动点 P 的轨迹为曲线 Γ 。

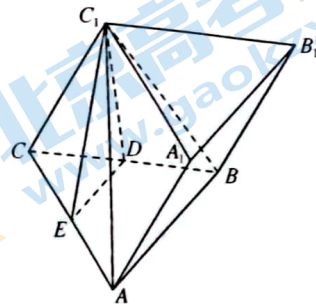
(1)求 Γ 的方程;

(2)过点 $A(1, 1)$ 能否作一条直线 l , 使得 l 与 Γ 交于 B, C 两点, 且 A 是线段 BC 的中点? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由。

20. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB=2,CA\perp CB,D,E$ 分别是 CB,CA 的中点, $C_1D=C_1E=2$.

- (1)若平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1 ,求点 C_1 到平面 ABC 的距离;
 (2)若 $CC_1=\sqrt{2}$,求平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x^2-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

- (1)当 $a=-2$ 时,存在 $x_1,x_2\in[0,1]$,使得 $f(x_1)-f(x_2)\geq M$,求 M 的最大值;
 (2)已知 m,n 是 $f(x)$ 的两个零点,记 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数,若 $m,n\in(0,+\infty)$,且 $m<n$,

证明: $f'\left(\frac{m+n}{2}\right)<0$.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{5}$,离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,斜率为 k 的直线 l 与椭圆 Γ 有两个不同的交点 A,B .

- (1)求 Γ 的方程;
 (2)若直线 l 的方程为 $y=x+t$,点 $M(0,1)$ 关于直线 l 的对称点 N (与 M 不重合) 在椭圆 Γ 上,求 t 的值;
 (3)设 $P(-3,0)$,直线 PA 与椭圆 Γ 的另一个交点为 C ,直线 PB 与椭圆 Γ 的另一个交点为 D ,若点 C,D 和点 $Q\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right)$ 三点共线,求 k 的值.