本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 若$(1-i)z=2+iz$，则z在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

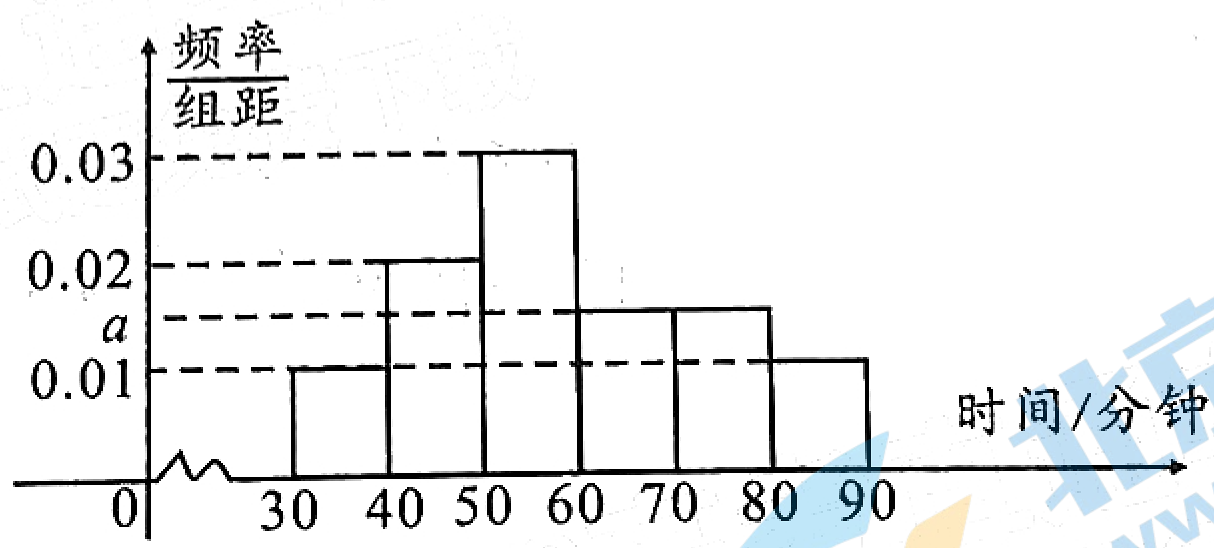
C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若$\varnothing$是集合$M=\{x|x^2-ax+1=0,a\in\mathbf{R}\}$的真子集，则$a$的取值范围是（　）

A. $(-2,2)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $[-2,2]$　　D. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

3. 为了解“双减”政策实施后学生每天的体育活动时间，研究人员随机调查了该地区10000名学生每天进行体育运动的时间，将所得数据统计如下图所示，则可以估计该地区学生每天体育活动时间的平均数约为（　）



A. 55分钟　B. 56.5分钟　C. 57.5分钟　D. 58.5分钟

4. 已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$\cos2\alpha-5\cos\alpha=2$，则$\tan\alpha=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

5. 已知$m,n\in\mathbf{R}$，则“$\log_{\frac{1}{2}}m<\log_{\frac{1}{2}}n$”是“$m^3+3m>n^3+3n$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

两部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卡上作答。

6. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，则 $f(x)$ 的解析式为（ ）

A. $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{12}\right)$ B. $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)=\cos\left(12x+\frac{\pi}{6}\right)$ D. $f(x)=\sin\left(12x+\frac{\pi}{12}\right)$

7. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y-1\geqslant 0\\3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$，则目标函数 $z=\frac{2y+1}{2x-1}$ 的取值范围为（ ）

A. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ B. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

C. $[-1,3]$ D. $[-3,1]$

8. 攒尖是我国古代建筑中屋顶的一种结构形式，通常有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖，多见于亭阁式建筑、园林建筑.下面以四角攒尖为例，如图 1，它的屋顶部分的轮廓可以近似看作如图 2 所示的正四棱锥 $P-ABCD$，其中底面边长和攒尖高的比值为 $\frac{1}{2}$，若点 E 是棱 PD 的中点，则异面直线 PB 与 CE 所成角的正切值为（ ）

图1

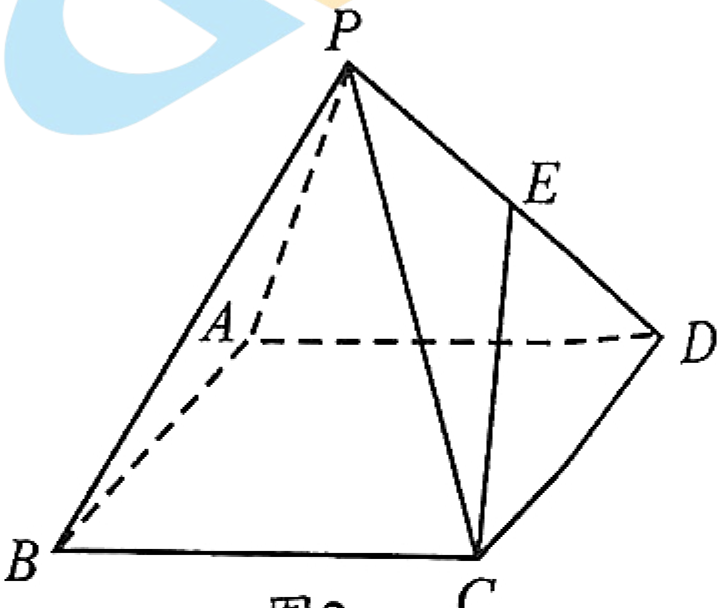


图2

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$，直线 $l:3x+\sqrt{3}y+3c=0$ 与双曲线左支的一个交点为 P，若 $|PF|=2c$，则双曲线的离心率为（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. $\sqrt{3}+1$ D. $\sqrt{5}+1$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $(a+b)(\sin A-\sin B)=c(\sin C+\sin B)$，若角 A 的内角平分线 AD 的长为 2，则 $4b+c$ 的最小值为（ ）

A. 10 B. 12 C. 16 D. 18

11. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，且 $AB\perp AC$，$\angle SCA=30°$，若 $AB=SA=4$，则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）

A. 40π B. 64π C. 80π D. 128π

12. 已知不等式 $ax-\frac{\ln x}{x^2}\geqslant\frac{a}{x}$ 对 $\forall x\in[1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（ ）

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{m}=(1,\lambda)$，$\boldsymbol{n}=(2,3)$，若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})//(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$，则实数 $\lambda=$________.

14. 某市卫健委从 4 名工作人员和 5 名专家中选取 3 人，组成督察小组到市直学校检查防疫工作，若工作人员和专家都需至少选一人，则不同的选法种数为________（用数字作答）.

15. 已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $P(4,0)$ 在点 F 的右边，若 C 上的点 Q 满足 $|QF|=|QP|$，$\angle QPF=60°$，则 $p=$________.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{8}{e^x+4}$，则下列说法中：

①函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\ln 4,1)$ 中心对称；

②函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,2)$；

③函数 $g(x)=f(x)-x^2-1$ 的所有零点之和大于 0.

其中所有正确说法的序号为________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_3=30$，$S_5-S_4=16$.

（Ⅰ）求 a_n；

（Ⅱ）记 $b_n=\dfrac{1}{na_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{11}{36}$.

18.（本小题满分 12 分）

新冠疫情期间，口罩的消耗量日益增加，某药店出于口罩进货量的考虑，连续 9 天统计了第 $x_i\ (i=1,2,3,\cdots,9)$ 天的口罩的销售量 y_i（百件），得到的数据如下：$\sum\limits_{i=1}^{9}x_i=45$，$\sum\limits_{i=1}^{9}y_i=171$，$\sum\limits_{i=1}^{9}x_i^2=285$，$\sum\limits_{i=1}^{9}x_iy_i=1095$，$\sum\limits_{i=1}^{9}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\dfrac{3125}{3}$.

（Ⅰ）若用线性回归模型 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 拟合 y 与 x 之间的关系，求该回归直线的方程；

（Ⅱ）统计学家甲认为用（Ⅰ）中的线性回归模型（下面简称模型 1）进行拟合，不够精确，于是尝试使用非线性模型（下面简称模型 2）得到 x_i 与 y_i 之间的关系，且模型 2 的相关系数 $r_2=0.989$，试通过计算说明模型 1，2 中，哪一个模型的拟合效果更好.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$；

对于一组具有线性相关关系的数据 $(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,\cdots,n)$，其回归直线 $\hat{y}=bx+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

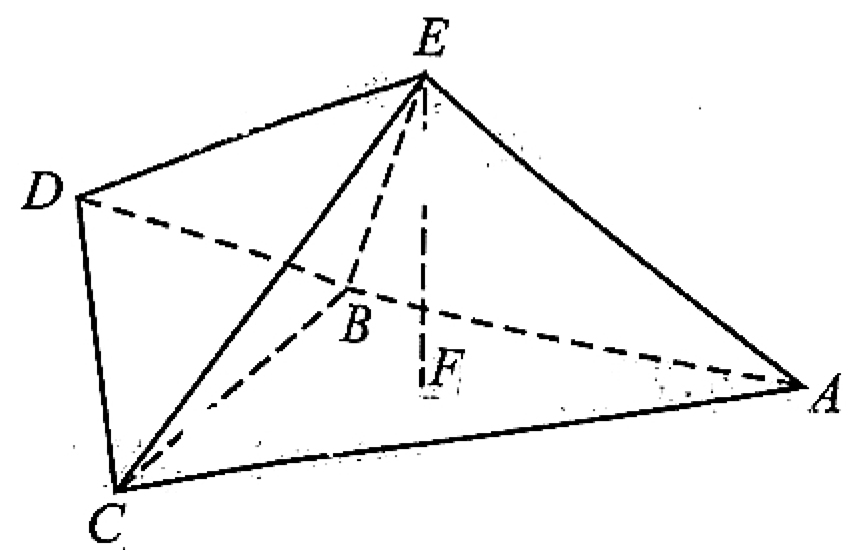
$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\quad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

19.（本小题满分 12 分）

多面体 $ABCDE$ 如图所示，其中 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，且 $\angle BDC=90^\circ$；$EB=EC=AB=AC$.

（Ⅰ）求证：$BC\perp DE$；

（Ⅱ）若 $\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，$F$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，$EF\perp$ 平面 ABC，求直线 CA 与平面 BEC 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $A\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且点 A 到 C 的右顶点的距离为 $\dfrac{\sqrt{39}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为坐标原点，直线 $l:y=kx+m\left(k>0,m<0\right)$ 与 C 交于 M,N 两点，记线段 MN 的中点为 P，连接 OP 并延长交 C 于点 Q，直线 $x=6$ 交射线 OP 于点 R，且|

求证：直线 l 过定点.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=m\ln x-xe^{x}+x$.

（Ⅰ）若 $m=1$，求 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若 $f(x_1)+x_1e^{x_1}+m=0$，$f(x_2)+x_2e^{x_2}+m=0$，其中 $x_1\neq x_2$，求实数 m 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答．注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号．

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，得曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+\cos\theta-\rho=0$．

（Ⅰ）求曲线 C_1 的极坐标方程与 C_2 的直角坐标方程；

（Ⅱ）已知射线 $l: y=kx\left(x\geqslant 0, 1\leqslant k\leqslant 2\right)$ 与曲线 C_1 交于 O, M 两点，与 C_2 交于 O, N 两点，求 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围．

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-3|+|3x-6|+2a+2$．

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求不等式 $f(x)<2$ 的解集；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)-|x-2|\leqslant a^2$ 有实数解，求实数 a 的取值范围．

名卷·A10联盟2022年高考最后一卷

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	D	B	A	B	B	C	A	D	C	C

1. A　由$(1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}z$，得$z=\dfrac{2}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{2(1+2\mathrm{i})}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$，故复数$z$在复平面内对应的点为$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，位于第一象限. 故选 A.

2. D　由“$\varnothing$是集合$M=\{x|x^2-ax+1=0,a\in\mathbf{R}\}$的真子集”得$M=\{x|x^2-ax+1=0,a\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing$，即方程$x^2-ax+1=0$有实数解，
$\therefore\Delta=a^2-4\geqslant0$，解得$a\leqslant-2$或$a\geqslant2$. 故选 D.

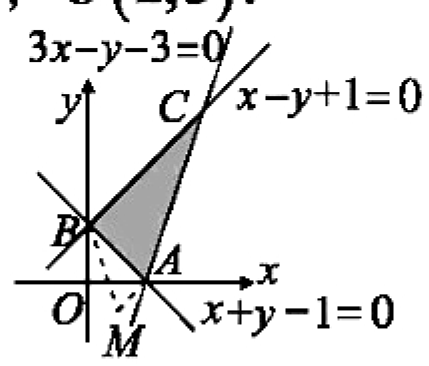
3. D　由题意得，$0.1+0.2+0.3+20a+0.1=1$，解得$a=0.015$，故该地区学生每天体育活动时间的平均数约为$35\times0.1+45\times0.2+55\times0.3+65\times0.15+75\times0.15+85\times0.1=58.5$. 故选 D.

4. B　由$\cos2\alpha-5\cos\alpha=2$，得$2\cos^2\alpha-5\cos\alpha-3=0$，解得$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$或$\cos\alpha=3$（舍去），又$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\therefore\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore\tan\alpha=-\sqrt{3}$. 故选 B.

5. A　$\because\log_{\frac{1}{2}}m<\log_{\frac{1}{2}}n\Leftrightarrow m>n>0$，$m^3+3m>n^3+3n\Leftrightarrow m>n$，
$\therefore$“$\log_{\frac{1}{2}}m<\log_{\frac{1}{2}}n$”是“$m^3+3m>n^3+3n$”的充分不必要条件. 故选 A.

6. B　将$y=\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，得到$y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象，再将$y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位长度，得到$f(x)=\sin\left[3\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=\sin\left(3x-\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象. 故选B.

7. B　作出约束条件的可行域，如图阴影部分所示，其中$A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(2,3)$.



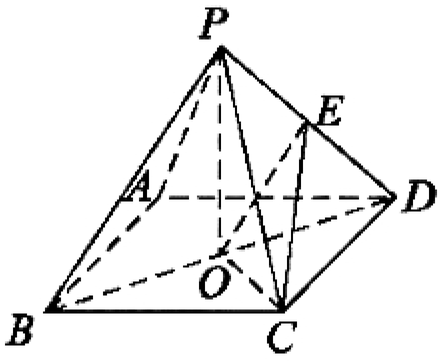
$z=\dfrac{2y+1}{2x-1}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$表示定点$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$与可行域内点$(x,y)$

连线的斜率，则 z 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$．故选 B.

8. C　如图，连接 BD，设 O 为 BD 的中点，$\therefore OE // BP$，$\therefore$ 异面直线 BP 与 CE 所成角为 $\angle OEC$ 或其补角．连接 OC,OP，易得 $OP\perp OC,BD\perp OC$，$\therefore OC\perp$ 平面 PBD，$\therefore OC\perp OE$．设 $AB=a$，$OP=h$，则由题意得 $\frac{a}{h}=\frac{1}{2}$，$OB=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$OE=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}\sqrt{OB^2+OP^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}a^2+h^2}$，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OEC$ 中，

$\tan\angle OEC=\frac{OC}{OE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}a^2+h^2}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+4a^2}}=\frac{2}{3}$．故选 C.



9. A　设双曲线的右焦点为 F_1，由题意得，直线 l 的倾斜角为 $-\sqrt{3}$，且经过双曲线的左焦点，当点 P 位于第三象限时，$\angle F_1FP=60^\circ$，又 $|PF|=|F_1F|=2c$，连接 PF_1，此时 $\triangle PF_1F$ 为正三角形，不符合题意，则点 P 位于第二象限，故 $\angle F_1FP=120^\circ$，连接 PF_1，$\because$ $|PF|=2c$，由双曲线的定义知 $|PF_1|=2a+2c$，$\because$ $|F_1F|=2c$，

$\therefore \triangle PF_1F$ 为等腰三角形，$\therefore |PF_1|=2|PF|\sin\frac{\angle PFF_1}{2}=4c\sin 60^\circ=2\sqrt{3}c$，

$\therefore 2a+2c=2\sqrt{3}c$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$．故选 A.

10. D　由正弦定理得 $(a+b)(a-b)=c(c+b)$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$，$\therefore$ 由余弦定理易得 $\cos A=-\frac{1}{2}$，又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$．$\because AD$ 平分角 A，$\therefore \angle BAD=\angle CAD=60^\circ$．由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得 $\frac{1}{2}bc\sin 120^\circ=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin 60^\circ+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin 60^\circ$，

即 $bc=2(b+c)$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$，$\therefore 4b+c=2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(4b+c)=2\left(5+\frac{c}{b}+\frac{4b}{c}\right)\geqslant 2(5+2\times 2)=18$，当且仅当 $c=2b$ 时等号成立，即 $4b+c$ 的最小值为 18．故选 D.

11. C　由题意得，$BA\perp$ 平面 SAC，将三棱锥补成三棱柱 $SAC-S_1BC_1$，则三棱柱 $SAC-S_1BC_1$ 的外接球即为所求．设外接球的球心为 O，则 $\triangle SAC$ 的外心为 O_1，

则 $OO_1=\frac{1}{2}AB=2$，又 $O_1A=\frac{1}{2}\cdot\frac{SA}{\sin\angle SCA}=4$，所以外接球的半径 $R=\sqrt{OO_1^2+O_1A^2}=2\sqrt{5}$，所以其表面积 $S=4\pi R^2=80\pi$．故选 C.

12. C　不等式 $ax-\frac{\ln x}{x^2}\geqslant\frac{a}{x}$ 对 $\forall x\in[1,+\infty)$ 恒成立等价于不等式 $ax^3-\ln x-ax\geqslant 0$ 对

$\forall x\in[1,+\infty)$ 恒成立，设 $g(x)=ax^3-\ln x-ax=ax(x^2-1)-\ln x(x\geq 1)$，

$g(1)=0$，则 $g'(x)=3ax^2-\frac{1}{x}-a=\frac{3ax^3-ax-1}{x}$，当 $a\leq 0$ 时，$g'(x)<0$，则

$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)\leq g(1)=0$ 与题意矛盾，$\therefore a>0$．令

$h(x)=3ax^3-ax-1(x\geq 1)$，则 $h'(x)=9ax^2-a=a(3x+1)(3x-1)>0$，$\therefore h(x)$

在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)\geq h(1)=2a-1$，当 $2a-1\geq 0$，即 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，

$g'(x)\geq 0$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)\geq g(1)=0$，符合题意；当

$2a-1<0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $h(1)=2a-1<0$，$h\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{3}{a^2}-2>0$，得存

在 $x_0\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$，使 $h(x_0)=0$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，则 $g(x)$

在 $(1,x_0)$ 上单调递减，则 $g(x)<g(1)=0$，不符合题意，因此实数 a 的最小值为 $\frac{1}{2}$．

故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. $\frac{3}{2}$

由题意得，$\boldsymbol{m}\,//\,\boldsymbol{n}$，$\therefore 2\lambda=3$，即 $\lambda=\frac{3}{2}$.

14. 70

从 4 名工作人员和 5 名专家中选取 3 人，共有 C_9^3 种情况. 若全为工作人员，共有 C_4^3 种；若全为专家，共有 C_5^3 种，$\therefore$ 工作人员、专家至少各一人，则不同的选法共有

$C_9^3-C_4^3-C_5^3=70$（种）.

15. $\frac{8}{5}$

由题意得，点 P 在焦点 F 的右边，准线为 $l:x=-\frac{p}{2}$，作 $QM\perp l$ 于 M，则

$|QF|=|QM|$．$\because |QF|=|QP|$，又 $\angle QPF=60°$，$\therefore\triangle QPF$ 为正三角形，易知

$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，又 $|QF|=|QP|$，$\therefore$ 点 Q 的横坐标为 $2+\frac{p}{4}$，$\therefore |QM|=2+\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=2+\frac{3p}{4}$，

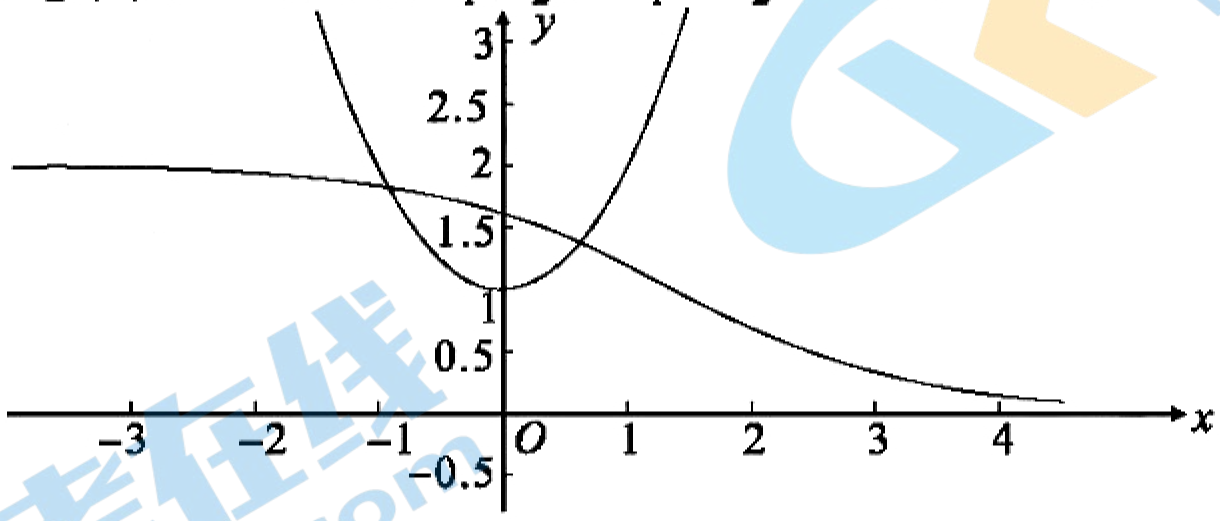
$|PF|=4-\frac{p}{2}$，$\therefore 2+\frac{3p}{4}=4-\frac{p}{2}$，解得 $p=\frac{8}{5}$.

16. ①②

因为 $f(2\ln 4-x)+f(x)=\frac{8}{e^{2\ln 4-x}+4}+\frac{8}{e^x+4}=2$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(\ln 4,1)$

中心对称，故①正确；易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，

当$x\to-\infty$时，$f(x)\to2$，故函数$f(x)$的值域为$(0,2)$，故②正确；令$g(x)=0$，得$f(x)=x^2+1$，在同一直角坐标系中分别作出函数$f(x)$和$y=x^2+1$的图象如下所示，观察可知，$g(x)$有两个零点x_1,x_2，$x_1+x_2<0$，故③错误.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

由$\begin{cases}S_5-S_4=a_5=16\\a_1+a_2+a_3=30\end{cases}$，得$\begin{cases}a_1+4d=16\\a_1+d=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=8\\d=2\end{cases}$，

$\therefore a_n=2n+6$. ……………………… 6 分

（Ⅱ）证明：$\because b_n=\dfrac{1}{na_n}=\dfrac{1}{n(2n+6)}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}\right)$，

$$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

$$=\frac{1}{6}\times\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)<\frac{1}{6}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{36}.$$ ………… 12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{9}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{1095-9\times5\times19}{285-9\times5^2}=4$，……4 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=19-4\times5=-1$，……………………… 5 分

故所求回归直线的方程为$\hat{y}=4x-1$；……………………… 6 分

（Ⅱ）模型 1 的相关系数

$$r_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{240}{\sqrt{60\times\dfrac{3125}{3}}}=\frac{240}{250}=0.96<0.989,$$ ………10 分

故模型 2 的拟合性更好. …………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）取 BC 中点 O，连接 AO,DO,EO，$\because BD=CD$，$\therefore DO\perp BC$. ………… 1 分

同理可得，$EO\perp BC$. …………………… 2 分

$\because DO\cap EO=O$，$\therefore BC\perp$ 平面 DOE. …………………… 3 分

又 $DE\subset$ 平面 DOE，$\therefore BC\perp DE$. …………………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，O 为 BC 中点，且 $AO\perp BC$，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

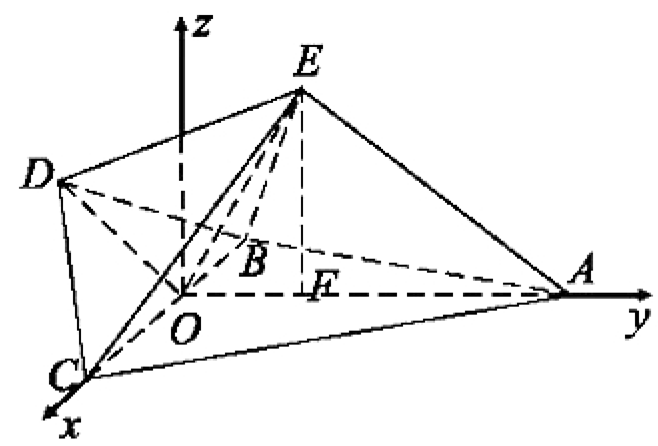
设 $AB=5$，则 $AC=5$，$BD=CD=4\sqrt{2}$，$BO=4$，$AO=3$，

$\because F$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore OF=\frac{1}{3}OA=1$，$EF=2\sqrt{2}$，

则 $A(0,3,0)$，$B(-4,0,0)$，$C(4,0,0)$，$E\left(0,1,2\sqrt{2}\right)$，则 $\overrightarrow{CA}=(-4,3,0)$. …… 5 分

设平面 BEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，且 $\overrightarrow{BC}=(8,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(4,1,2\sqrt{2}\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}8x=0\\ 4x+y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，



令 $y=2\sqrt{2}$，则 $x=0$，$z=-1$，

$\therefore \boldsymbol{n}=\left(0,2\sqrt{2},-1\right)$. …………………… 9 分

设直线 CA 与平面 BEC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{CA},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{6\sqrt{2}}{5\times3}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，…………………… 11 分

即直线 CA 与平面 BEC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. …………………… 12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$(-1-a)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{39}{4}$，解得 $a=2$（负值舍去），………… 2 分

将 $A\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得，$\frac{1}{4}+\frac{3}{4b^2}=1$，解得 $b^2=1$，………… 4 分

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………… 5 分

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$l:y=kx+m(k>0,m<0)$，

联立 $\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，由 $\Delta>0$，得 $1+4k^2>m^2$.

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$\therefore P\left(-\frac{4km}{1+4k^2},\frac{m}{1+4k^2}\right)$. …………………… 7 分

由斜率公式可知 $k_{OP}=-\dfrac{1}{4k}$，$\therefore l_{OP}:y=-\dfrac{1}{4k}x$，$\therefore R\left(6,-\dfrac{3}{2k}\right)$. …………… 8 分

联立 $\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=-\dfrac{1}{4k}x\end{cases}$，得 $x^2=\dfrac{16k^2}{1+4k^2}$，即 $x_Q^2=\dfrac{16k^2}{1+4k^2}$. …………………… 9 分

$\because |OQ|^2=|OP|\cdot|OR|$，$\therefore x_Q^2=x_P\cdot x_R$，$\therefore \dfrac{16k^2}{1+4k^2}=-\dfrac{24km}{1+4k^2}$，$\therefore m=-\dfrac{2}{3}k$，

此时满足 $\Delta>0$，$\therefore$ 直线 l 过定点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. ………………… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，$f(x)=\ln x-xe^x+x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1-(x+1)e^x=(x+1)\left(\dfrac{1}{x}-e^x\right)$.

令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}-e^x\ (x>0)$，则 $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-e^x<0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …………………… 2 分

又 $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$\varphi(1)=1-e<0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$，…………………… 3 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x)$ 有最大值 $f(x_0)=\ln x_0+x_0-x_0e^{x_0}=\ln(x_0e^{x_0})-x_0e^{x_0}=\ln 1-1=-1$. … 5 分

另法：当 $m=1$ 时，$f(x)=\ln x-xe^x+x=\ln(xe^x)-xe^x$，令 $t=xe^x>0$，

则 $h(t)=\ln t-t$，其中 $t>0$，$h'(t)=\dfrac{1-t}{t}$，

$\therefore$ 当 $t\in(0,1)$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，故 $h(t)_{\max}=h(1)=-1$，即 $f(x)$ 的最大值为 -1. …………………… 5 分

（Ⅱ）令 $g(x)=m\ln x+x+m,x\in(0,+\infty)$，

由题意知 m 的取值应满足函数 $g(x)$ 有两个零点.

易得 $g'(x)=\dfrac{m}{x}+1=\dfrac{x+m}{x}$，

若 $m\geqslant 0$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意，舍去；…………………… 6 分

若 $m<0$，则当 $x\in(0,-m)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(-m,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

要使函数 $g(x)$ 有两个零点，则 $g(x)_{\min} = g(-m) = m\ln(-m) < 0$，$\therefore m < -1$.…8 分

易知 $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} > 0$，$g\left(e^{-2m}\right) = m\ln e^{-2m} + e^{-2m} + m = -2m^2 + e^{-2m} + m\left(m < -1\right)$.

令 $p(x) = e^{-2x} - 2x^2 + x, x < -1$，则 $p'(x) = -2e^{-2x} - 4x + 1, x < -1$，

令 $q(x) = -2e^{-2x} - 4x + 1, x < -1$，则 $q'(x) = 4e^{-2x} - 4 > 0, x < -1$，

$\therefore p'(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，$\therefore p'(x) < p'(-1) = -2e^2 + 5 < 0$，

$\therefore p(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，

$\therefore p(x) > p(-1) = e^2 - 2 - 1 > 0$，$\therefore g(e^{-2m}) > 0$，…………………… 11 分

由 $\frac{1}{e} < -m < e^{-2m}$ 知 $g(x)$ 在 $(0,-m)$ 和 $(-m,+\infty)$ 上各有一个零点，

则实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1)$. …………………… 12 分

另法：令 $g(x) = m\ln x + x + m, x \in (0,+\infty)$，

由题意知 m 的取值应满足函数 $g(x)$ 有 两个零点.

若 $m \geqslant 0$，易知 $g(x)$ 单调递增，不符合题意，舍去；…………………… 6 分

若 $m < 0$，由 $g(x) = m\ln x + x + m = 0$，$x \in (0,+\infty)$ 知，$-\frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{m}$，

令 $h(x) = -\frac{1+\ln x}{x}, x \in (0,+\infty)$，则 $h'(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x \in (0,+\infty)$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $h(1) = -1$，且 $x \in (1,+\infty)$ 时，$h(x) < 0$，$\therefore \frac{1}{m} > -1$，解得 $m < -1$，

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1)$. …………………… 12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）由 $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = 1 + \sin\alpha \end{cases}$ 得，$x^2 + (y-1)^2 = 1$，即 $x^2 + y^2 = 2y$，

将 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 代入，得 $\rho^2 = 2\rho\sin\theta$，

故曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$. …………………… 3 分

由 $\rho\cos^2\theta + \cos\theta - \rho = 0$ 得，$\rho^2\sin^2\theta = \rho\cos\theta$，

将 $\rho\cos\theta = x, \rho\sin\theta = y$ 代入，得 $y^2 = x$，

即曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2 = x$. …………………… 5 分

（Ⅱ）由题意得，射线 $l: y = kx(x \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant 2)$ 的极坐标方程为

$\theta = \theta_0(\tan\theta_0 = k, \rho \geqslant 0)$. …………………… 6 分

联立$\begin{cases}\rho=2\sin\theta\\ \theta=\theta_0\end{cases}$，得$|\overrightarrow{OM}|=\rho_M=2\sin\theta_0$， ························ 7分

联立$\begin{cases}\rho\sin^2\theta=\cos\theta\\ \theta=\theta_0\end{cases}$，得$|\overrightarrow{ON}|=\rho_N=\dfrac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}$， ························ 8分

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|=2\sin\theta_0\cdot\dfrac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}=\dfrac{2}{\tan\theta_0}=\dfrac{2}{k}\in[1,2]$. ··············· 10分

23. （本小题满分10分）选修4-5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$|2x-3|+|3x-6|<2$，

当$x<\dfrac{3}{2}$时，不等式化为$3-2x+6-3x<2$，解得$x>\dfrac{7}{5}$，$\therefore \dfrac{7}{5}<x<\dfrac{3}{2}$；

当$\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$时，不等式化为$2x-3+6-3x<2$，解得$x>1$，$\therefore \dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$；

当$x>2$时，不等式化为$2x-3+3x-6<2$，解得$x<\dfrac{11}{5}$，$\therefore 2<x<\dfrac{11}{5}$，

则不等式$f(x)<2$的解集为$\left\{x\left|\dfrac{7}{5}<x<\dfrac{11}{5}\right.\right\}$. ························ 5分

（Ⅱ）由题意得，$a^2-2a-2\geqslant|2x-3|+|2x-4|$有实数解，························ 7分

$\because |2x-3|+|2x-4|\geqslant|(2x-3)-(2x-4)|=1$， ························ 8分

当且仅当$(2x-3)(2x-4)\leqslant 0$时取等号，

$\therefore a^2-2a-2\geqslant 1$，解得$a\leqslant -1$或$a\geqslant 3$，

$\therefore a$的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.························ 10分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.