广东省 2023—2024 学年高三 11 月统一调研测试

数学参考答案及评分细则

1.【答案】B

【解析】由题意可得 $z\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，所以 $z=-\mathrm{i}+2$，则 $|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，故选 B.

2.【答案】C

【解析】因为 $A=\left\{x \mid x^2-3x+2\geq 0\right\}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$，因为 $y=x^2\geq 0$，所以 $B=[0,+\infty)$，

所以 $A\cap B=[0,1]\cup[2,+\infty)$，$A\cup B=\mathbf{R}$，$A\not\subseteq B$，$B\not\subseteq A$，故选 C.

3.【答案】A

【解析】所求概率为 $\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，故选 A.

4.【答案】D

【解析】因为 $|\vec{b}|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}|\vec{a}|\neq 0$，且 $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，所以 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$，

即$\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{a}^2=-|\vec{a}|^2$，

设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-|\vec{a}|^2}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}|\vec{a}|^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，即$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{5\pi}{6}$，故选 D.

5.【答案】A

【解析】由题设易知$a>0$，且$a\neq1$，设$t=ax^2-3x+a$，则函数$t=ax^2-3x+a$开口向上且对称轴为$x=\dfrac{3}{2a}$，

所以$t=ax^2-3x+a$在$\left(\dfrac{3}{2a},+\infty\right)$上单调递增，则$y=\log_a t$为增函数，所以$a>1$.

要使$f\left(x\right)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$(1,+\infty)\subseteq\left(\dfrac{3}{2a},+\infty\right)$，即$\dfrac{3}{2a}\leq1$，

所以$\dfrac{3}{2}\leq a$，要使$ax^2-3x+a>0$对$x\in(1,+\infty)$恒成立，则只需$a-3+a\geq0$，$a\geq\dfrac{3}{2}$.

综上，$a\geq\dfrac{3}{2}$. 所以“$a>2$”是“函数$f\left(x\right)$在$(1,+\infty)$上单调递增”的充分不必要条件，故选 A.

6.【答案】C

【解析】易知两曲线有公共的右焦点F_2，根据题意$F\left(-2,0\right)$，$F_2\left(2,0\right)$，$a=1$，

根据椭圆的定义得到$|PF|+|PF_2|=8$，

根据双曲线的定义得到$|PF|-|PF_2|=2$，

故$|PF|=5$，$|PF_2|=3$，又$|FF_2|=4$，

所以$|PF_2|^2+|FF_2|^2=|PF|^2$，从而$PF_2\perp FF_2$，$\cos\angle PFQ=-\cos\angle FPF_2=-\dfrac{|PF_2|}{|PF|}=-\dfrac{3}{5}$，

故选 C.

7.【答案】B

【解析】方法一：记$\angle BCD=\beta$，由题意得$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\beta$，$\alpha$，$\beta$为锐角，

则$\tan\alpha=\tan[(\alpha+\beta)-\beta]=\dfrac{\tan\beta}{2\tan^2\beta+1}$

$$=\frac{1}{2\tan\beta+\dfrac{1}{\tan\beta}}\leq\frac{1}{2\sqrt{2\tan\beta\cdot\dfrac{1}{\tan\beta}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

即 $\tan\alpha$ 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

当且仅当 $2\tan\beta=\frac{1}{\tan\beta}$ 即 $\tan\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

此时 α 也最大 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$，故选 B.

方法二：设 $BA=a$，$BC=c$，以点 B 为坐标原点，BA，BC 分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系，

则 $A(a,0)$，$B(0,0)$，$C(0,c)$，$D\left(\frac{a}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{CA}=(a,-c)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{a}{2},-c\right)$

所以 $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{\frac{a^2}{2}+c^2}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+c^2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{a^2}{2}+c^2\right)^2}{\left(a^2+c^2\right)\left(\frac{a^2}{4}+c^2\right)}}$

可齐次化，不妨设 $a=1$，$\frac{a^2}{2}+c^2=t(t>0)$，

则 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{t^2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right)}}=\sqrt{\frac{t^2}{t^2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{4t}-\frac{1}{8t^2}}}=\sqrt{\frac{1}{-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\frac{9}{8}}}$

所以当 $t=1$，即 $c^2=\frac{a^2}{2}$ 时，$\cos\alpha$ 取最小值 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

又因为 α 是锐角，此时 α 最大 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$，

故选 B.

8.【答案】D

【解析】由题，$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$，$a_n>0$ 且前 8 项为 1，2，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{8}{5}$，$\frac{13}{8}$，$\frac{21}{13}$，$\frac{34}{21}$

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{a_n}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n+1}{a_n}$$

所以当 $a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$；

当 $a_n>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}<0$.

所以 $a_{2n-1}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$a_{2n}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$a_{n+2}-a_n=1+\frac{1}{a_{n+1}}-a_n=1+\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}-a_n=-\frac{\left(a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{a_n+1}$

其中 $a_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}>0$，

所以 $a_{2n+1}-a_{2n-1}>0$，$a_{2n+2}-a_{2n}<0$

所以 $a_1<a_3<a_5<\cdots<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$a_2>a_4>a_6>\cdots>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

所以不满足 $\left|a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|<0.005$ 的分别为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，$2024-6=2018$，故选 D.

9.【答案】BC

【解析】由题得 $5+6+7+8+y+11=6\times8=48$，所以 $y=11$，所以 A 错误；

根据定义极差为 $11-5=6$，B 正确；

因为 $6\times0.4=2.4$，40%分位数为 7，C 正确；

根据方差公式，方差为 $\frac{1}{6}\times\left[(5-8)^2+(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(11-8)^2+(11-8)^2\right]=\frac{16}{3}$，D 错误，故选 BC.

10.【答案】ACD

【解析】对于 A：$a+c>a+b>0$，A 正确；

对于 B：$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{c(a+b)}{ab}>0$，B 错误；

对于 C：$\frac{b+c}{c-a}+\frac{b}{a}=\frac{a(b+c)+b(c-a)}{(c-a)a}=\frac{(a+b)c}{(c-a)a}>0$，C 正确；

对于 D：$\frac{1}{b}-a-b+\frac{1}{a}=\frac{a+b}{ab}-(a+b)=(a+b)\left(\frac{1}{ab}-1\right)<0$，D 正确，故选 ACD.

11.【答案】ABC

【解析】设 $P(x,y)$，$|OP|^2=x^2+y^2=x^2+(-4-x)^2=2x^2+8x+16=2(x+2)^2+8$

所以当 $x=-2$，即 $P(-2,-2)$ 时，$|OP|$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$，A 正确；

四边形 $OMPN$ 的周长为 $|OM|+|MP|+|PN|+|NO|=4+2\sqrt{|OP|^2-4}$，当 $|OP|$ 取最小值 $2\sqrt{2}$ 时，四边形 $OMPN$ 的周长最小为 8，B 正确；

因为 $OM\perp MP$，所以 $\sin\angle MPO=\dfrac{|OM|}{|OP|}=\dfrac{2}{|OP|}$，又因为 $|OP|\geq 2\sqrt{2}$，

所以 $\cos\angle MPN=\cos(2\angle MPO)=1-2\sin^2\angle MPO=1-\dfrac{8}{|OP|^2}\geq 0$，

则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\left|\overrightarrow{PM}\right|\left|\overrightarrow{PN}\right|$，C 正确；

$\triangle OMN$ 外接圆的面积最小为 2π，无最大值，D 错误，故选 ABC.

12.【答案】ACD

【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

由 $f(x)=f(2-x)-x+1$，得 $f(0)=f(2)+1=0$，所以 $f(2)=-1$，故选项 A 正确；

因为 $f(x)=f(2-x)-x+1$ 可化为 $f(x)+\dfrac{x}{2}=f(2-x)+\dfrac{2-x}{2}$，令 $g(x)=f(x)+\dfrac{x}{2}$，则 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上可导的奇函数，$g(0)=0$，且 $g(x)=g(2-x)=-g(x-2)$，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且是以 4 为周期的函数，所以 $g(2022)+g(2024)=g(2)+g(0)=0$，所以 $f(2022)+f(2024)=g(2022)-\dfrac{2022}{2}+g(2024)-\dfrac{2024}{2}=g(2)+g(0)-2023=-2023$，故选项 B 错误；

因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，$g(x)=f(x)+\dfrac{x}{2}$，所以 $g(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增．由对称性得 $g(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上单调递减，

所以 $g(2.2)>g(2.8)$，即 $f(2.2)+1.1>f(2.8)+1.4$，所以 $f(2.2)-f(2.8)>0.3$，故选项 C 正确；

因为 $g(x)=g(2-x)=-g(x-2)$，所以 $g'(x)=-g'(2-x)=-g'(x-2)$，从而 $g'(1)=-g'(1)=-g'(-1)$，解得 $g'(-1)=0$．由 $g(x+4)=g(x)$，得 $g'(x+4)=g'(x)$，，从而 $g'(x)$ 是以 4 为周期的函数，所以，$g'(2023)=g'(-1)=f'(2023)+\dfrac{1}{2}=0$，所以 $f'(2023)=-\dfrac{1}{2}$，故选项 D 正确．故选 ACD.

13.【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】因为 $g(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2024}\right)$ 的最小正周期为 π，所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

14.【答案】5

【解析】由 $\log_3 a=\log_4 b=\log_{12}5$ 得 $a=3^{\log_{12}5}$， $b=4^{\log_{12}5}$，

所以 $ab=3^{\log_{12}5}\times 4^{\log_{12}5}=(3\times 4)^{\log_{12}5}=5$.

15.【答案】$6\sqrt{2}$

【解析】依题设 $P\left(x,y\right)$，则 $\dfrac{x^2}{10}+y^2=1$， $-1\le y\le 1$

由 $|DQ|=\sqrt{2}$，可得点 Q 的轨迹是以 D 为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径的圆.

$|DP|^2=x^2+(y-6)^2=10-10y^2+(y-6)^2=-9y^2-12y+46=-9\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2+50\le 50$，$|DP|\le 5\sqrt{2}$

当且仅当 $y=-\dfrac{2}{3}$ 取等号，

即 $|DP|_{\max}=5\sqrt{2}$，故 $|PQ|_{\max}=|DP|_{\max}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

16.【答案】$\dfrac{13\pi}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

【解析】记以 A_1 为球心 $\sqrt{3}$ 为半径的球面与底面 ABC 的交线半径为 r，正三棱柱的高为 h，则 $\dfrac{1}{6}\times 2\pi r=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$，

且 $r^2+h^2=3$， 解 得 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $h=\dfrac{3}{2}$， 则 三 棱 柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 表 面 在 球 内 部 分 的 总 面 积 为

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)\times 3+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{13\pi}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

17. 解：（1）若选择①，$b_1=3^1\cdot a_1=1$，$b_3=3^3\cdot a_3=3^3\times\dfrac{5}{27}=5$（1 分）

则等差数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d=\dfrac{b_3-b_1}{2}=\dfrac{5-1}{2}=2$，（3 分）

所以 $b_n=2n-1$，所以 $a_n=\dfrac{b_n}{3^n}=\dfrac{2n-1}{3^n}$（5 分）

若选择② $c_1=\dfrac{a_1}{1}=\dfrac{1}{3}$，$c_3=\dfrac{a_3}{5}=\dfrac{1}{27}$（1 分）

则等比数列 $\{c_n\}$ 的公比 q 满足 $q^2=\dfrac{c_3}{c_1}=\dfrac{1}{9}$，又 $q>0$，故 $q=\dfrac{1}{3}$，（3 分）

所以 $c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$， $a_n=(2n-1)c_n=\frac{2n-1}{3^n}$．（5 分）

若选择③，因为 $S_n=a-(n+b)\left(\frac{1}{3}\right)^n$，

则 $a_1=S_1=a-\frac{1}{3}(1+b)=\frac{1}{3}$， $a_3=S_3-S_2=-(3+b)\left(\frac{1}{3}\right)^3+(2+b)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{27}$，（1 分）

解得 $a=b=1$．

故 $S_n=1-\frac{n+1}{3^n}$，（3 分）

当 $n\geq 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2n-1}{3^n}$；

又 $a_1=\frac{1}{3}$，符合上式，

所以 $a_n=\frac{2n-1}{3^n}$．（5 分）

（2）由（1）知 $a_n=\frac{2n-1}{3^n}$，所以 $b_n=2n-1$， $c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$．（7 分）

$$T_n=\left(b_1+c_1\right)+\left(b_2+c_2\right)+\cdots+\left(b_n+c_n\right)=\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)+\left(c_1+c_2+\cdots+c_n\right)$$

$$=\frac{(1+2n-1)n}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=n^2-\frac{1}{2\times 3^n}+\frac{1}{2}$$ （10 分）

【评分细则】

第（2）问结果没有化简或化简错的，只要有 $\frac{(1+2n-1)n}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}$ 这一步，整体只扣 1 分.

18．解：（1）由 $a\cos B+b\cos A=\frac{\sqrt{3}c}{3}\tan C$ 及正弦定理，

得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\tan C$， 即 $\sin(A+B)=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\tan C$，（2 分）

又 $\triangle ABC$ 中， $A+B+C=\pi$， 则 $\sin(A+B)=\sin C>0$， 故 $\tan C=\sqrt{3}$，（4 分）

又 $0<C<\pi$， 则 $C=\frac{\pi}{3}$．（6 分）

（2）因为$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab\ge a^2+b^2-\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{a^2+b^2}{2}$

所以$a^2+b^2\le 18$，当且仅当$a=b=3$时取等号.（8 分）

因为D为AB边的中点，

所以$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，

两边平方得到$\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{4}\left(b^2+a^2+2ab\cos C\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)-\dfrac{9}{4}\le 9-\dfrac{9}{4}=\dfrac{27}{4}$

故$CD\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$a=b=3$时取等号.

故CD的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.（12 分）

【评分细则】

1．第（1）问凡是有推理不严密，如漏$\sin C>0$，$0<C<\pi$等，整体只扣 1 分，不多次扣分；

2．第（2）问用其他方法做，只要推理与结果对，也给满分，但过程中利用基本不等式求最值时，至少要有一处说明取等条件（$a=b$或$a=b=3$），否则扣 1 分.

19．（1）证明：连接AC，在$\triangle ABC$中，因为$\angle ABC=60°$，$AB=1$，$BC=2$，

所以由余弦定理得，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=3$，

因为$AC^2+AB^2=BC^2$，所以$AC\perp AB$，

因为四边形$ABCD$为平行四边形，

所以$AB\parallel CD$，所以$CD\perp AC$.（2 分）

又因为$PC\perp CD$，$PC\cap AC=C$，PC，$AC\subset$平面PAC，

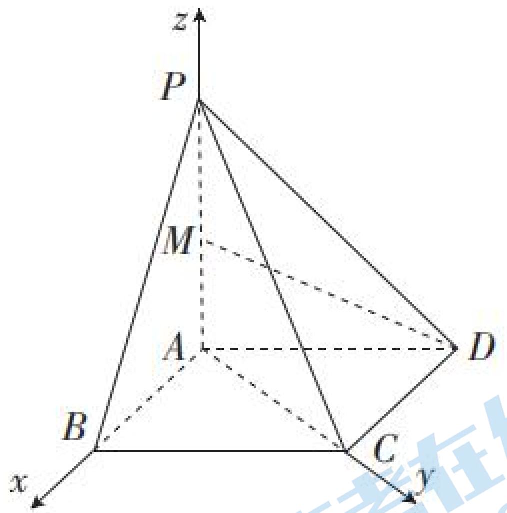
所以$CD\perp$平面PAC.（4 分）

因为$PA\subset$平面PAC，所以$PA\perp CD$.（5 分）

（2）解：因为$PA\perp AC$，$PA\perp CD$，$AC\cap CD=C$，AC，$CD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp$平面$ABCD$.

又因为$AB\perp AC$，所以AB，AC，AP两两相互垂直，以A为坐标原点，AB，AC，AP所在的直线分别为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$.（6 分）



因为 $CD \perp AC$，$PC \perp CD$，所以 $\angle PCA$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角，即 $\angle PCA = 60^\circ$．（7 分）

在 $\triangle PAC$ 中，$\angle PAC = 90^\circ$，$\angle PCA = 60^\circ$，$AC = \sqrt{3}$，所以 $AP = 3$．

因为 M 为棱 PA 的中点，

所以 $AM = \dfrac{3}{2}$．

根据条件，$C(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,3)$，$D(-1,\sqrt{3},0)$，$M\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$

所以 $\overrightarrow{CD} = (-1,0,0)$，$\overrightarrow{PC} = (0,\sqrt{3},-3)$，$\overrightarrow{MD} = \left(-1,\sqrt{3},-\dfrac{3}{2}\right)$（9 分）

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC} = \sqrt{3}y - 3z = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = -x = 0 \end{cases}$

取 $\vec{n} = (0,\sqrt{3},1)$．（11 分）

设直线 MD 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta = |\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{MD}\rangle| = \dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{MD}|} = \dfrac{3}{10}$

即直线 MD 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{10}$．（12 分）

【评分细则】

第（2）问可能存在其他建系方法，只要推理与结果正确，同样给满分．

20．解：（1）因为 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$P(0,3)$，

所以 $\tan\angle PFO=\dfrac{OP}{OF}=\dfrac{6}{p}$，

又 $\tan\angle PFO=3$，所以 $\dfrac{6}{p}=3$，$p=2$，

故 C 的标准方程为：$y^2=4x$．（4 分）

（2）设 $E(n,0)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$M\left(x_3,y_3\right)$，$N\left(x_4,y_4\right)$，EA 的方程为 $x=my+n$，

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+n\end{cases}$

得 $y^2-4my-4n=0$．

则 $\Delta>0$，$y_1y_3=-4n$，同理 $y_2y_4=-4n$．（7 分）

所以直线 MN 的斜率为 $k=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\dfrac{y_3-y_4}{\dfrac{y_3^2}{4}-\dfrac{y_4^2}{4}}=\dfrac{4}{y_3+y_4}=\dfrac{4}{\dfrac{-4n}{y_1}+\dfrac{-4n}{y_2}}=\dfrac{-y_1y_2}{n\left(y_1+y_2\right)}=1$（9 分）

设 AB 的方程为 $y=kx+3$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+3\end{cases}$ 得 $ky^2-4y+12=0$．

则 $\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{4}{k}\\y_1y_2=\dfrac{12}{k},\end{cases}$

所以 $\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{\frac{12}{k}}{\frac{4}{k}}=3$，$n=\dfrac{-y_1y_2}{y_1+y_2}=-3$，

所以点 E 的坐标为 $\left(-3,0\right)$．（12 分）

【评分细则】

1．第（1）问只求出 $p=2$ 给 2 分；

2．第（2）问利用其它的参数计算直线 MN 的斜率和点 E 的坐标，只要结果正确也同样给分．

21．解：（1）当 $a=\mathrm{e}-1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-\ln x-1$，$x>0$，

则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}+(1-\mathrm{e})=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}+\dfrac{x-1}{x}$，$x>0$（1 分）

当 $x>1$ 时，$e^x-e>0$，$\dfrac{x-1}{x}>0$，故 $f'(x)>0$；

当 $0<x<1$ 时 $e^x-e<0$，$\dfrac{x-1}{x}<0$，故 $f'(x)<0$，

故 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(0,1\right)$．（4 分）

（2）方法一：$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-a$，$x>0$，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，

则 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

取 $m=\dfrac{1}{e+|a|}<1$，$f'(m)=e^m-\dfrac{1}{m}-a<e-\dfrac{1}{m}+|a|=e-(e+|a|)+|a|=0$

取 $n=\ln(|a|+e)\geq 1$，$f'(n)=e^n-\dfrac{1}{n}-a>e^n-1-|a|=e^{\ln(|a|+e)}-1-|a|=e-1>0$（5 分）

又 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上图象不间断，且 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故存在唯一的 $x_0\in\left(m,n\right)$ 使得 $f'\left(x_0\right)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-a=0$，即 $e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=a$．（6 分）

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增．

因此 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=e^{x_0}-ax_0-\ln x_0-1=e^{x_0}-\left(e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}\right)x_0-\ln x_0-1=\left(1-x_0\right)e^{x_0}-\ln x_0$（9 分）

当 $0<x_0<1$ 时，即 $a=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}<e-1$ 时，$\left(1-x_0\right)e^{x_0}>0$，$-\ln x_0>0$，

故 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=\left(1-x_0\right)e^{x_0}-\ln x_0>0$，此时 $f\left(x\right)$ 无零点；

当 $x_0=1$ 时，即 $a=e-1$ 时，故 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=0$，此时 $f\left(x\right)$ 有 1 个零点为 1；（10 分）

当 $x_0>1$ 时，即 $a=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}>e-1$ 时，$\left(1-x_0\right)e^{x_0}<0$，$-\ln x_0<0$，

故 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=\left(1-x_0\right)e^{x_0}-\ln x_0<0$，

取 $t=e^{-a-1}<1$，则 $f(t)=e^t-at-\ln t-1>-at-\ln t-1>-a-\ln e^{-a-1}-1=0$，

又 $f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上图象不间断，故存在：$x_1\in\left(t,x_0\right)$ 使得 $f\left(x_1\right)=0$，即此时 $f\left(x\right)$ 存在零点．（11 分）

综上所述，$f\left(x\right)$ 存在零点时，实数 a 的取值范围为 $a\geq \mathrm{e}-1$．（12 分）

方法二：由（1）知当 $a=\mathrm{e}-1$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(0,1\right)$，且

$f(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-\ln x-1\geq f(1)=0$，

当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 $f\left(x\right)$ 有 1 个零点；（5 分）

当 $a<\mathrm{e}-1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-\ln x-1>\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-\ln x-1\geq 0$，

即 $f\left(x\right)>0$，故 $f\left(x\right)$ 没有零点；（6 分）

当 $a>\mathrm{e}-1$ 时，构造函数 $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}(x>0)$，证明 $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}<1$（过程略），从而 $\mathrm{e}^x>x^2$ 对 $x>0$ 恒成立；

构造函数 $t(x)=x-1-\ln x$，证明 $t(x)=x-1-\ln x\geq 0$（过程略），从而 $-\ln x\geq 1-x$．

因此，$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-\ln x-1\geq \mathrm{e}^x-ax+(1-x)-1>x^2-(a+1)x$，

故 $f\left(a+1\right)>0$．

又 $f\left(1\right)=\mathrm{e}-a-1<0$，且 $f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上图象不间断，

故存在 $x_0\in\left(1,a+1\right)$，使得 $f\left(x_0\right)=0$，

即此时 $f\left(x\right)$ 存在零点．（11 分）

综上所述，$f\left(x\right)$ 存在零点时，实数 a 的取值范围为 $a\geq \mathrm{e}-1$．（12 分）

方法三：令 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-\ln x-1=0$，$a=\dfrac{\mathrm{e}^x-\ln x-1}{x}$，

令 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\ln x-1}{x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}\right)x-\left(\mathrm{e}^x-\ln x-1\right)}{x^2}=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x+\ln x}{x^2}$

当 $0<x<1$ 时，$g'\left(x\right)<0$；公众号：全元高考

当 $x>1$ 时，$g'\left(x\right)>0$，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $g(1)=\mathrm{e}-1$，

若函数 $f(x)$ 存在零点，则 $a=\dfrac{\mathrm{e}^x-\ln x-1}{x}$ 有解，所以 $a\ge \mathrm{e}-1$.（8 分）

当 $a\ge \mathrm{e}-1$ 时，$g(1)\le a$，

令 $0<x_0=\mathrm{e}^{-a-1}<1$，$g(x_0)=\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}-(-a-1)-1}{x_0}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_0}+a}{x_0}>a$

又因为 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上图象不间断，故存在 $x_1\in(x_0,1]$，使得 $g(x_1)=a$，

综上所述，$f(x)$ 存在零点时，实数 a 的取值范围为 $a\ge \mathrm{e}-1$.（12 分）

【评分细则】

1．第（1）问仅正确求得单调递增区间、单调递减区间中的一个扣 2 分；

2．第（2）问相关解法中涉及到的取点（不唯一）是否取到，不影响后续步骤的得分.

22．解：（1）由题意可知 X_1 的所有可能取值为 1，2，

且 $P(X_1=1)=P(X_1=2)=\dfrac{1}{2}$，（1 分）

由题意可知 X_2 的所有可能取值为 0，1，2，

且 $P(X_2=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}P(X_1=1)=\dfrac{3}{32}$，

$$P(X_2=1)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)P(X_1=1)+\frac{1}{2}P(X_1=2)=\frac{9}{16}$$

$$P(X_2=2)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\right)P(X_1=1)+\frac{1}{2}P(X_1=2)=\frac{11}{32}$$

X_2 的概率分布表如下：

X_2	0	1	2
P	$\dfrac{3}{32}$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{11}{32}$

（4 分）

$E(X_2)=0\times\dfrac{3}{32}+1\times\dfrac{9}{16}+2\times\dfrac{11}{32}=\dfrac{5}{4}$.（5 分）公众号：全元高考

（2）当 $n\ge 2$ 时，由题意可知 X_n 的所有可能取值为 0，1，2，

$$P(X_n=1)=\frac{1}{2}P(X_{n-1}=0)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)P(X_{n-1}=1)+\frac{1}{2}P(X_{n-1}=2)$$

$=\frac{1}{2}P\left(X_{n-1}=0\right)+\frac{5}{8}P\left(X_{n-1}=1\right)+\frac{1}{2}P\left(X_{n-1}=2\right)$

$=\frac{1}{2}\left[P\left(X_{n-1}=0\right)+P\left(X_{n-1}=2\right)\right]+\frac{5}{8}P\left(X_{n-1}=1\right)$

$=\frac{1}{2}\left[1-P\left(X_{n-1}=1\right)\right]+\frac{5}{8}P\left(X_{n-1}=1\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}P\left(X_{n-1}=1\right)$

则 $P\left(X_n=1\right)-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left[P\left(X_{n-1}=1\right)-\frac{4}{7}\right]$，$P\left(X_1=1\right)-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}$

$P\left(X_n=1\right)-\frac{4}{7}\neq 0$

故 $\dfrac{P\left(X_n=1\right)-\frac{4}{7}}{P\left(X_{n-1}=1\right)-\frac{4}{7}}=\frac{1}{8}$

故 $\left\{P\left(X_n=1\right)-\frac{4}{7}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{14}$ 、公比为 $\frac{1}{8}$ 的等比数列.（11 分）

故 $P\left(X_n=1\right)-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$，$P\left(X_n=1\right)=\frac{4}{7}-\frac{1}{14}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\frac{1}{7}\left(4-\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$.（12 分）

【评分细则】

1．第（1）问中，3 个概率求解中可以先求出其中 2 个，用间接法求第 3 个，3 个概率都正确得 2 分，有正确的但不完全正确的给 1 分，概率分布表 1 分；

2．第（2）问中，等比数列的证明不严密整体扣 1 分.