海淀区高三年级第二学期阶段性测试

数　学

2020 春

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）已知集合 $A=\{x\,|\,0<x<3\}$，$A\cap B=\{1\}$，则集合 B 可以是

（A）$\{1,2\}$　　（B）$\{1,3\}$

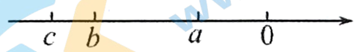
（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{1,2,3\}$

（3）已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则 b 的值为

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

（4）已知实数 a，b，c 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是



（A）$b-a<c+a$　　（B）$c^2<ab$

（C）$\dfrac{c}{b}>\dfrac{c}{a}$　　（D）$|b|c<|a|c$

（5）在 $(\dfrac{1}{x}-2x)^6$ 的展开式中，常数项为

（A）-120　　（B）120

（C）-160　　（D）160

（6）如图，半径为1的圆 M 与直线 l 相切于点 A，圆 M 沿着直线 l 滚动.当圆 M 滚动到圆 M' 时，圆 M' 与直线 l 相切于点 B，点 A 运动到点 A'，线段 AB 的长度为 $\frac{3\pi}{2}$，则点 M' 到直线 BA' 的距离为

（A）1　　　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

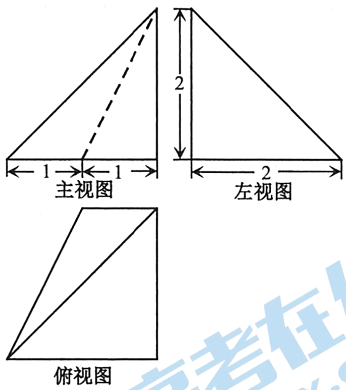
（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　（D）$\frac{1}{2}$

（7）已知函数 $f(x)=|x-m|$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称.若 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调递减，则 m 的取值范围为

（A）$[-1,+\infty)$　　　　（B）$(-\infty,-1]$

（C）$[-2,+\infty)$　　　　（D）$(-\infty,-2]$

（8）某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥中最长棱的棱长为



（A）$\sqrt{5}$　　　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）$2\sqrt{3}$　　　　（D）$\sqrt{13}$

（9）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，则“$\forall p$，$r\in\mathbf{N}^*$，$a_{p+r}=a_pa_r$”是“$\{a_n\}$ 为等比数列”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（10）形如 $2^{2^n}+1$（n 是非负整数）的数称为费马数，记为 F_n. 数学家费马根据 F_0，F_1，F_2，F_3，F_4 都是质数提出了猜想：费马数都是质数. 多年之后，数学家欧拉计算出 F_5 不是质数，那么 F_5 的位数是

（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$）

（A）9　　　　（B）10

（C）11　　　　（D）12

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知点 $P(1,2)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上，则抛物线 C 的准线方程为______.

（12）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 3$，$a_2 + a_5 = 16$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项的和为______.

（13）已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$，则 $(\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} =$______.

（14）在△ABC 中，$AB = 4\sqrt{3}$，$\angle B = \frac{\pi}{4}$，点 D 在边 BC 上，$\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$，$CD = 2$，

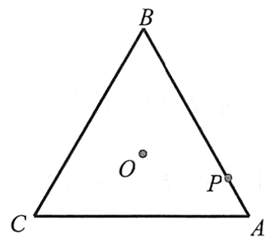
则 $AD =$______；△ACD 的面积为______.

（15）如图，在等边三角形 ABC 中，$AB = 6$．动点 P 从点 A 出发，沿着此三角形三边逆时针运动回到 A 点，记 P 运动的路程为 x，点 P 到此三角形中心 O 距离的平方为 $f(x)$，给出下列三个结论：

①函数 $f(x)$ 的最大值为 12；

②函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x = 9$；

③关于 x 的方程 $f(x) = kx + 3$ 最多有 5 个实数根.



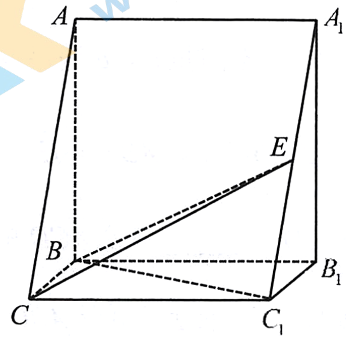
其中，所有正确结论的序号是______.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$AB=BB_1=2BC=2$，$BC_1=\sqrt{3}$，点 E 为 A_1C_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$C_1B\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求二面角 $A-BC-E$ 的大小.

（17）（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega_1 x+\sin\omega_2 x$.

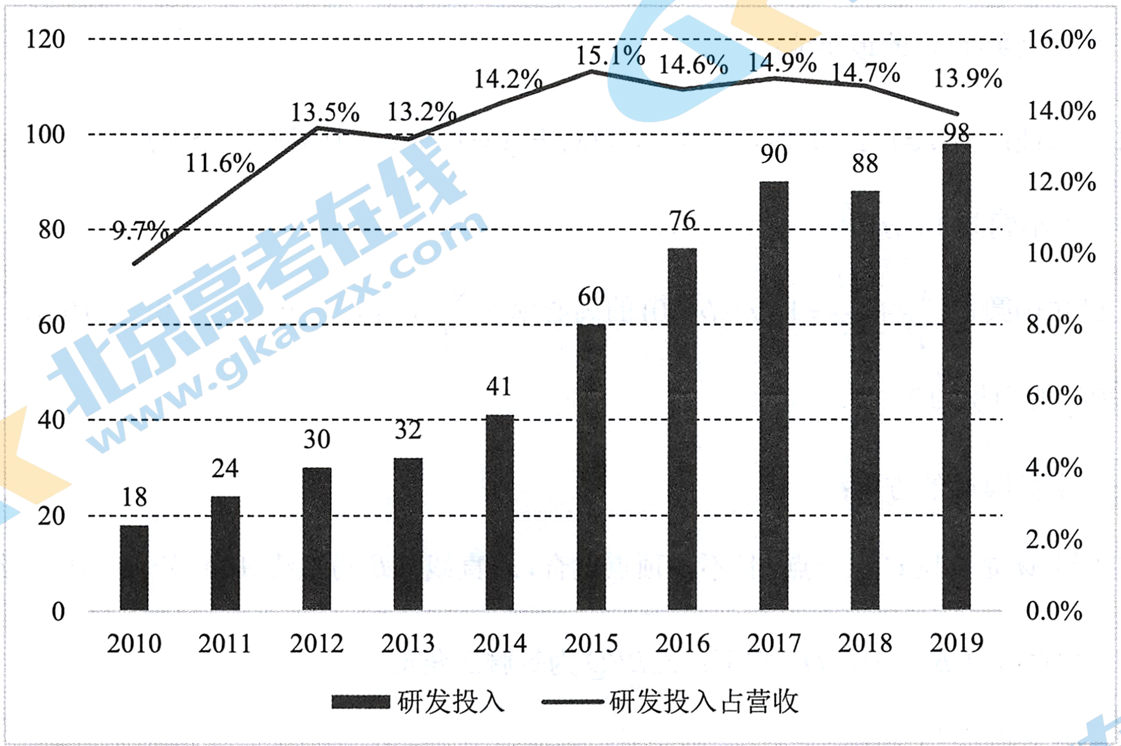
（Ⅰ）求 $f(0)$ 的值；

（Ⅱ）从① $\omega_1=1$，$\omega_2=2$； ② $\omega_1=1$，$\omega_2=1$ 这两个条件中任选一个，作为题目的已知条件，求函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$ 上的最小值，并直接写出函数 $f(x)$ 的一个周期.

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分。

(18) （本小题共 14 分）

科技创新能力是决定综合国力和国际竞争力的关键因素，也是推动经济实现高质量发展的重要支撑,而研发投入是科技创新的基本保障. 下图是某公司从 2010 年到 2019 年这 10 年研发投入的数据分布图：



其中折线图是该公司研发投入占当年总营收的百分比，条形图是当年研发投入的数值（单位：十亿元）.

（Ⅰ）从 2010 年至 2019 年中随机选取一年，求该年研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 的概率；

（Ⅱ）从 2010 年至 2019 年中随机选取两个年份，设 X 表示其中研发投入超过 500 亿元的年份的个数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）根据图中的信息，结合统计学知识，判断该公司在发展的过程中是否比较重视研发，并说明理由.

（19）（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，

①求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

②求函数 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）求证：当 $a\in(-2,0)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=1-\ln x$ 有且只有一个交点.

（20）（本小题共 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，$\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 M 是椭圆 C 上一点，且不与顶点重合，若直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P，直线 A_1M 与直线 A_2B 交于点 Q. 求证：$\triangle BPQ$ 为等腰三角形.

（21）（本小题共 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是由正整数组成的无穷数列. 若存在常数 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{2n-1}+a_{2n}=ka_n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(k)$.

（Ⅰ）分别判断下列数列 $\{a_n\}$ 是否具有性质 $\Psi(2)$；（直接写出结论）

① $a_n=1$；　　② $a_n=2^n$.

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}\geqslant a_n(n=1,2,3,\cdots)$，求证："数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(2)$" 是"数列 $\{a_n\}$ 为常数列"的充分必要条件；

（Ⅲ）已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，且 $a_{n+1}>a_n(n=1,2,3,\cdots)$. 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(4)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

海淀区高三年级第二学期阶段性测试参考答案

数　学

2020. 春

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. A　　2. B　　3. B　　4. D　　5. C

6. C　　7. D　　8. C　　9. A　　10. B

二、填空题:本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $x=-1$；　　12. 24；　　13. 0；

14. $4\sqrt{2};2\sqrt{6}$；　　15. (1) (2)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.

16. （共 14 分）

(1).

$\because AB\perp$ 平面BB_1C_1C

$C_1B\subset$ 平面BB_1C_1C

$\therefore AB\perp C_1B$

又$\because ABC-A_1B_1C_1$为三棱柱

$AB=BB_1=2BC=2$

$\therefore BB_1=2=CC_1, BC=1$

$\because BC_1=\sqrt{3}$

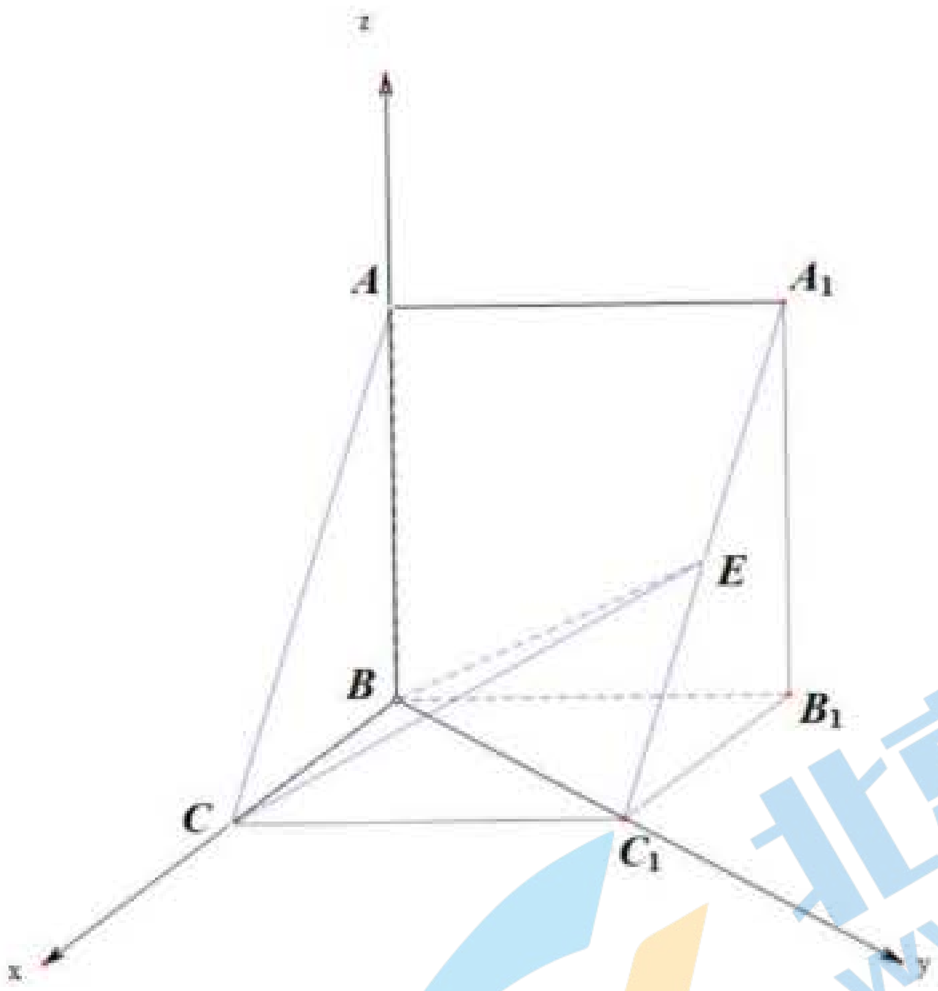
$\therefore$ 在ΔBCC_1中，$BC^2+C_1B^2=CC_1{}^2$

$\therefore C_1B\perp BC$

$\because BC\bigcap AB=B$

$BC\subset$ 面ABC, $AB\subset$ 面ABC

$\therefore C_1B\perp$ 平面ABC



(2)

$\because C_1B\perp$ 平面ABC

$\therefore C_1B\perp BC$

又$\because AB\perp$ 平面BB_1C_1C

$\therefore AB\perp BC, AB\perp BC_1$

$\therefore$ 以B为空间直角坐标系原点，BC为x轴，BC_1为y轴，BA为z轴建系如图

$B(0,0,0), C(1,0,0), C_1(0,\sqrt{3},0), E(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$

$\overrightarrow{BE}=(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1), \overrightarrow{BC}=(1,0,0)$

设平面BCB_1的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$\therefore \vec{n}\perp\overrightarrow{BE},\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$x+\sqrt{3}y+z=0$

$x=0$

$\therefore x=0$

令$y=\sqrt{3}$则$z=-3$

$\vec{n}=(0,\sqrt{3},-3)$

$\because \overrightarrow{BC_1}\perp$平面$ABC$

17.（共 14 分）

解：(Ⅰ) $f(0)=2\cos 0+\sin 0=2$；

(Ⅱ) 当取① $\omega_1=1$， $\omega_2=2$ 时

$f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x=\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$

$\because x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$

$\therefore 2x+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]$

$\therefore$ 当$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$时,即$x=-\frac{3\pi}{8}$

$f(x)_{\min}=f(-\frac{3\pi}{8})=1-\sqrt{2}$

$T=\pi$

当取② $\omega_1=1$， $\omega_2=1$ 时，

$f(x)=2\cos^2 x+\sin x=-2\sin^2 x+\sin x+2$。

令$t=\sin x$ ， $\because x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$， $\therefore t\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，

则 $f(x)=g(t)=-2t^2+t+2,t\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

所以 $f(x)_{\min}=g(t)_{\min}=g(-1)=-2-1+2=-1$

并且 $T=2\pi$

18.（共 14 分）

解：(1).由题意可知，从 2010 年到 2019 年共 10 年，其中研发投入占当年营收的百分比超过 10% 的有 9 年；设从 2010 年到 2019 年随机选取一年，研发投入占当年营收的百分比超过 10% 为事件 A. 所以 $P(A)=\frac{9}{10}$

(2).由图可知，研发投入超过 500 亿元的年份的有 5 个，未超过 500 亿元的年份有 5 个。

由题意可知 X 的可取值为：0,1,2.

$$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{9}$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$$

所以 X 的分布列为：

P	0	1	2
X	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{2}{9}=1$.

(3). 由题意可知从 2010 年到 2019 年共 10 年，其中该年研发投入占当年营收的百分比超过 10% 的有 9 年；而且从研发投入上看研发投入基本都在每年增加。可见该公司在发展的过程中比较重视研发。

19.（共 15 分）

解：（Ⅰ）①切线方程为 $y=1$；

② $f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$；

所以，当 x 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$；

（Ⅱ）当 $a\in(-2,0)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=1-\ln x$ 有且只有一个交点等价于

$F(x)=e^x+ax+\ln x-1(x>0)$ 有且只有一个零点；

方法一：

$$F'(x)=e^x+a+\frac{1}{x}(x>0)$$

①当 $x\in(0,1)$ 时，$e^x>1$，$\frac{1}{x}>1$，$-2<a<0$；所以 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；

②当 $x\in[1,+\infty)$，$e^x\ge e$，$0<\frac{1}{x}\le 1$，$-2<a<0$；所以 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增；

综上可知：$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

又因为 $F(3)=e^3+3a+\ln 3-1>0$，$F(e^{-1})=e^{e^{-1}}+\frac{a}{e}+\ln(e^{-1})-1<e^{\frac{1}{2}}-2+\frac{a}{e}<0$；

由零点存在定理可知：$F(x)=e^x+ax+\ln x-1$ 在 $(\frac{1}{e},3)$ 上存在唯一零点，记为 x_0；

所以当 $a\in(-2,0)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=1-\ln x$ 有且只有一个交点．

方法二：

$F'(x)=e^x+a+\frac{1}{x}$ 其中 $x\in(0,+\infty)$，$a\in(-2,0)$

设 $g(x)=F'(x)$

$g'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$，$g'(x)$ 单调递增，且 $g'(1)>0, g'\left(\frac{1}{2}\right)<0$，

$\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使 $g'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{{x_0}^2}=0$，此时 $e^{x_0}=\frac{1}{{x_0}^2}$

所以 $g(x), g'(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

	$(0,\ x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

$g(x_0)=F'(x_0)=e^{x_0}+a+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}+a+\frac{1}{x_0}$,

因为$\frac{1}{x_0}>1,\frac{1}{x_0^2}>1$，所以$g(x_0)>0$

所以$F(x)$在$x\in(0,+\infty)$单调递增,

$F\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}+\frac{a}{e}-1-1$，$e<4<2^e$,所以$e^{\frac{1}{e}}<2$，又因为$a\in(-2,0)$,

所以$F\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}+\frac{a}{e}-2<0$

$F(e)=e^e+ae-1+1$, $e^e>e^2>7$, $ae>-2e>-6$, $F(e)=e^e+ae-1+1>0$

根据零点存在性定理可得一定存在一个x_1,使得$F(x_1)=e^{x_1}+ax_1-1+\ln x_1=0$

所以当$a\in(-2,0)$时，曲线$y=f(x)$与$y=1-\ln x$有且只有一个交点.

20.（共 14 分）

解：（1）由题得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\times 2ab=2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

$\therefore$椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)方法一：

设$M(x_0,y_0),(x_0\neq 0,\pm 2)$ $\therefore\ \frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$.

可求得直线 $A_1M: y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，直线 $A_2B: \frac{x}{2}+y=1$

联立：$\begin{cases} y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2) \\ \frac{x}{2}+y=1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=\frac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2} \\ y=\frac{-4y_0}{x_0-2y_0-2} \end{cases}$ $\therefore Q(\frac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2},\frac{-4y_0}{x_0+2y_0+2})$

同理：直线 $A_2M: y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

直线 $A_1B: \frac{x}{-2}+y=1$ 可求得 $P(\frac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2},\frac{-4y_0}{x_0-2y_0-2})$

可求得：

$|BQ|^2=x_Q^2+(1-y_Q)^2=x_Q^2+\frac{x_Q^2}{4}=\frac{5x_Q^2}{4}$,

$|BP|^2=x_P^2+(1-y_P)^2=x_P^2+\frac{x_P^2}{4}=\frac{5x_P^2}{4}$,

而

$x_Q^2-x_P^2=(\frac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2})^2-(\frac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2})^2$

$=4[(\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2})^2-(\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2})^2]$

$=4(\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2}+\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2})(\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2}-\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2})$

其中

$\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2}+\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2}$

$=\frac{(x_0-2y_0+2)(x_0-2y_0-2)+(x_0+2y_0-2)(x_0+2y_0+2)}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}$

$=\frac{(x_0-2y_0)^2-4+(x_0+2y_0)^2-4}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}$

$=\frac{2x_0^2+8y_0^2-8}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}=0$

$\therefore |BQ|^2=|BP|^2$ 即 $|BQ|=|BP|$

$\therefore \Delta BPQ$ 为等腰三角形

方法二：

设 $M(x_0,y_0),(x_0\neq 0,\pm 2)\ \therefore \dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1.$

可求得直线 $A_1M:y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，直线 $A_2B:\dfrac{x}{2}+y=1$

联立：$\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2) \\ \dfrac{x}{2}+y=1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2} \\ y=\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2} \end{cases}$ $\therefore Q(\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2},\dfrac{-4y_0}{x_0+2y_0+2})$

同理：直线 $A_2M:y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

直线 $A_1B:\dfrac{x}{-2}+y=1$　　　可求得 $P(\dfrac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2},\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2})$

线段 PQ 的中点 H，$y_H=\dfrac{1}{2}(\dfrac{-4y_0}{x_0+2y_0+2}+\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2})=\dfrac{-8(y_0^{\ 2}+y_0)}{x_0^{\ 2}-(2y_0+2)^2}=1$

$\therefore K_{BH}=0,$

$\because x_Q-x_P$

$=\dfrac{-2[(x_0-2y_0+2)(x_0-2y_0-2)+(x_0+2y_0-2)(x_0+2y_0+2)]}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}$

$=\dfrac{(x_0-2y_0)^2-4+(x_0+2y_0)^2-4}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}$

$=\dfrac{2x_0^2+8y_0^2-8}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}=0$

$\therefore PQ$ 的斜率不存在

$\therefore PQ\perp AH$

$\therefore \Delta BPQ$ 为等腰三角形.

方法三：

$\because Q(\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2},\dfrac{-4y_0}{x_0+2y_0+2})$

$P(\frac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2},\frac{-4y_0}{x_0-2y_0-2})$

$|BQ|^2=x_Q^{\ 2}+(1-y_Q)^2=x_Q^{\ 2}+\frac{x_Q^{\ 2}}{4}=\frac{5x_Q^{\ 2}}{4}$,

$|BP|^2=x_P^{\ 2}+(1-y_P)^2=x_P^{\ 2}+\frac{x_P^{\ 2}}{4}=\frac{5x_P^{\ 2}}{4}$,

而

$x_Q^{\ 2}-x_P^{\ 2}=(\frac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2})^2-(\frac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2})^2$

$=4[(\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2})^2-(\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2})^2]$

$=4(\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2}+\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2})(\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2}-\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2})$

其中

$\frac{x_0-2y_0+2}{x_0+2y_0+2}+\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2y_0-2}$

$=\frac{(x_0-2y_0+2)(x_0-2y_0-2)+(x_0+2y_0-2)(x_0+2y_0+2)}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}$

$=\frac{(x_0-2y_0)^2-4+(x_0+2y_0)^2-4}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}$

$=\frac{2x_0^{\ 2}+8y_0^{\ 2}-8}{(x_0+2y_0+2)(x_0-2y_0-2)}=0$

$\therefore |BQ|^2=|BP|^2$ 即 $|BQ|=|BP|$

$\therefore$ ΔBPQ 为等腰三角形.

21.（共 14 分）

解 (1) ①具有性质 $\psi(2)$; ②不具有性质 $\psi(2)$.

(2) 充分性: $\forall n\in N^*, a_{2n-1}\geq a_n, a_{2n}\geq a_n$, 因此 $a_{2n-1}+a_{2n}\geq 2a_n$. 等号成立当且仅当 $a_{2n}=a_{2n-1}=a_n$, 若 $\{a_n\}$ 非常数列, 设 $k=\min\{i\in N^*\mid a_i\neq a_1\}$, 显然 $k\geq 2$.

若 $2\mid k$, 则 $a_k=a_{\frac{k}{2}}=a_1$; 若 $2\nmid k$, 则 $a_k=a_{\frac{k-1}{2}}=a_1$, 矛盾. 因此 $\{a_n\}$ 为常数列.

必要性: 因为 $\forall n\in N^*, a_n=a_1$, 因此 $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_1=2a_n$.

(3) $a_1=1$, $a_1+a_2=4a_1$, 可知$a_2=3$, 因此$a_3+a_4=4a_2=12$且$a_3\geq 4$.
若$a_3=4$, 则$a_4=8$, $a_5+a_6\geq 9+10>16=4a_3$, 矛盾;若$a_3\geq 6$, 则$a_4\leq 6$, 矛盾.
因此$a_3=5, a_4=7$. 下证$a_n=2n-1$. 假设该命题不成立,

设$k=\min\{i\in N^*\mid a_{2i-1}\neq 4i-3$或$a_{2i}\neq 4i-1\}$, 显然$k\geq 3$.

考虑数列$\{b_n\}$, 其中$b_n=a_{n+2k-4}-4(k-2)$, 则数列$\{b_n\}$也具有性质$\psi(4)$,

且$b_1=a_{2k-3}-4(k-2)=4k-7-4(k-2)=1$, 同理有$b_3=5, b_4=7$,

即$a_{3+2k-4}-4(k-2)=5, a_{4+2k-4}-4(k-2)=7$,

有$a_{2k-1}=4k-3$且$a_{2k}=4k-1$, 矛盾. 证毕.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多