

2023 届“皖南八校”高三第一次大联考

数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、不等式、函数与导数、三角函数、向量

一、选择题：共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2x - 4 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

A. (2, 3)

B. $(-3, \frac{3}{2})$

C. $(1, \frac{3}{2})$

D. $(-3, -\frac{3}{2})$

2. “ $x=1$ ”是“ $x^2 + 2x - 3 = 0$ ”的

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x) = \frac{\lg(x+1)}{x-2}$ 的定义域是

A. $(-1, +\infty)$

B. $[-1, +\infty)$

C. $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$

D. $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

4. 设 $a = \log_6 5$, $b = (\log_6 4)^2$, $c = \log_5 6$, 则

A. $a < c < b$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $b < a < c$

5. 设 $2^a = 5^b = m$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, 则 $m =$

A. $\sqrt{10}$

B. 10

C. 20

D. 100

6. 双碳，即碳达峰与碳中和的简称，2020 年 9 月中国明确提出 2030 年实现“碳达峰”，2060 年实现“碳中和”。为了实现这一目标，中国加大了电动汽车的研究与推广，到 2060 年，纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%，新型动力电池随之也迎来了蓬勃发展的机遇。Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C (单位： $A \cdot h$)，放电时间 t (单位： h) 与放电电流 I (单位： A) 之间关系的经验公式 $C = I^n \cdot t$ ，其中 $n = \log_{\frac{3}{2}} 2$ 为 Peukert 常数。在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I = 10 A$ 时，放电时间 $t = 56 h$ ，则当放电电流 $I = 15 A$ 时，放电时间为

A. 28 h

B. 28.5 h

C. 29 h

D. 29.5 h

7. 下列说法正确的有

- A. 若向量 $a \parallel b, b \parallel c$, 则 $a \parallel c$
- B. 若向量 $a \cdot b > 0$, 则向量 a, b 的夹角为锐角
- C. 向量 a, b, c 是三个非零向量, 若 $a \cdot c = b \cdot c$, 则 $a = b$
- D. 向量 a, b 是两个非零向量, 若 $|a+b| = |a-b|$, 则 $a \perp b$

8. 若角 α 的终边经过点 $P(\sin 830^\circ, \cos 430^\circ)$, 且 $\tan \alpha + \tan 2\alpha + m \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha = \sqrt{3}$, 则实数 m 的值为

- A. $-\sqrt{3}$
- B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. $\sqrt{3}$

9. 已知 $4x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbb{R})$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是

- A. $2\sqrt{3}$
- B. $\frac{5}{4}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{4}{5}$

10. 已知函数 $f(x) = e^x$, 若关于 x 的不等式 $f(x) > a \ln(ax - 2a) - 2a (a > 0)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(0, e^2)$
- B. $(e^2, +\infty)$
- C. $(0, e^3)$
- D. $(e^3, +\infty)$

11. 已知 x_1, x_2, x_3 是函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b (a, b \in \mathbb{R})$ 的零点, 且 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 若 $|x_1| + x_2 = x_3$, 则当 a, b 变化时, $3a + b$ 的最小值是

- A. $-4\sqrt{2}$
- B. $-2\sqrt{2}$
- C. $4\sqrt{2}$
- D. $2\sqrt{2}$

12. 若 $f(x) = |\sin x + \sqrt{3}\cos x| + |\sqrt{3}\sin x - \cos x|$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期是 π
- B. $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$
- C. 存在实数 a , 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都存在 $x_1, x_2 \in \left[-\frac{5\pi}{12}, 0\right]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 满足 $[f(x)]^2 - af(x)f(x_1) + 1 = 0 (k=1, 2)$
- D. 若函数 $g(x) = 2f(x) + b, x \in \left[0, \frac{25\pi}{12}\right] (b \text{ 是实常数})$, 有奇数个零点 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n-1} (n \in \mathbb{N})$, 则 $x_1 + 2(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + x_{n-1} = \frac{25\pi}{3}$

二、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 a, b 满足 $|a| = |b| = 1, a \cdot (b - a) = -1$, 则 $|2a + b| =$ _____.

14. 写出一个最小正周期为 3 的奇函数 $f(x) =$ _____.

15. 函数 $f(x) = \cos 2x \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的最大值为 _____.

16. 设 x, y 是正实数, 记 S 为 $x \cdot y - \frac{2}{x}, \frac{2}{y}$ 中的最小值, 则 S 的最大值为 _____.

三、解答题：共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

若正数 a, b , 满足 $a+2b=1$.

(1) 求 ab 的最大值;

(2) 求 $\frac{5}{a+1} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

18. (12 分)

已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha\right)$ 的值.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = -\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

20. (12分)

某群体的人均通勤时间,是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时,某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤,分析显示:当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时,自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 80, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位:分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响,恒为 50 分钟,试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时,公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式;并求出 $g(x)$ 的最小值.

21. (12分)

对于函数 $f(x)$,若其定义域内存在实数 x 满足 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为“准奇函数”.

(1) 已知函数 $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$,试问 $f(x)$ 是否为“准奇函数”? 说明理由;

(2) 若 $g(x) = 3^x + m$ 为定义在 $[-1, 1]$ 上的“准奇函数”,试求实数 m 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + 2e^x - 4ex + \frac{1}{2}ae$.

(1) 当 $a=0$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 a 为整数,当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立,求 a 的最小值.

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 3 \approx 1.0998, e = 2.7182\dots$)

2023 届“皖南八校”高三第一次大联考·数学

参考答案、解析及评分细则

一、选择题:共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

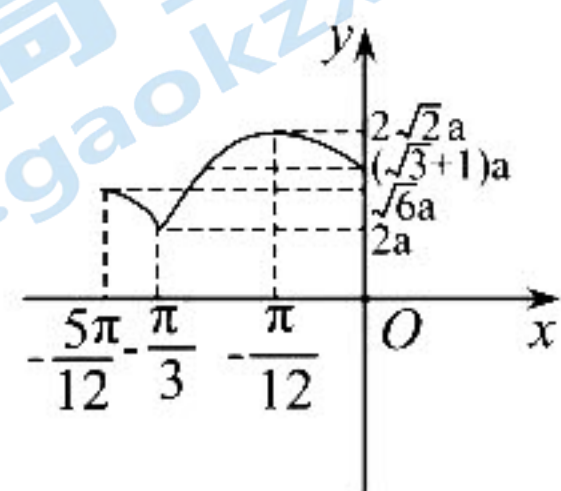
1. A 由题意,得 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | x > 2\}$, $\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$. 故选 A.
2. B 当 $x=1$ 时, $x^2 + 2x - 3 = 1^2 + 2 - 3 = 0$, 充分条件成立. 解方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 得 $x=1$ 或 -3 , 必要条件不成立. \therefore “ $x=1$ ”是“ $x^2 + 2x - 3 > 0$ ”成立的充分不必要条件. 故选 B.
3. C 由题可得 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ 解得 $x > -1$ 且 $x \neq 2$. 故选 C.
4. D $\because c = \log_5 6 > \log_5 5 = 1, a = \log_6 5 < \log_6 6 = 1, \log_6 4 < 1 \therefore (\log_6 4)^2 < \log_6 4 < \log_6 5 < 1 < \log_5 6, \therefore b < a < c$. 故选 B.
5. D 由 $2^a = 5^b = m$, 可得 $a = \log_2 m, b = \log_5 m, \therefore \frac{1}{a} = \log_m 2, \frac{1}{b} = \log_m 5, \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 2 + \log_m 5 = \log_m^{10} = \frac{1}{2}, \therefore 10 = m^{\frac{1}{2}}, \therefore m = 100$. 故选 D.
6. A 由 $C = I \log_{\frac{3}{2}}^2 t$, 得 $I=10$ 时, $t=56$, 即 $10 \log_{\frac{3}{2}}^2 56 = C$; $I=15$ 时, $C = 15 \log_{\frac{3}{2}}^2 t, \therefore 10 \log_{\frac{3}{2}}^2 56 = 15 \log_{\frac{3}{2}}^2 t, \therefore t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}^2 56} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}^2 56} = 2^{-1} \cdot 56 = \frac{1}{2} \times 56 = 28$. 故选 A.
7. D 对于 A, 若 $b=0$, 则 a 与 c 不一定平行, 故 A 错误; 对于 B, 由 $a \cdot b > 0$ 得 $\langle a, b \rangle \in [0^\circ, 90^\circ), \therefore$ 向量 a 与 b 的夹角为锐角或 0° 角; 对于 C, 由 $a \cdot c = b \cdot c$ 得 $(a-b) \cdot c = 0$, 则 $a=b$ 或 $(a-b) \perp c$; 对于 D, 由题可知, 向量 a, b 共起点, 作平行四边形, 对角线相等, \therefore 此四边形是矩形, $\therefore a \perp b$. 故选 D.
8. D $\sin 830^\circ = \sin 70^\circ = \cos 20^\circ, \cos 430^\circ = \cos 70^\circ = \sin 20^\circ, \therefore P(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ), \therefore \cos \alpha = \cos 20^\circ, \sin \alpha = \sin 20^\circ, \tan \alpha = \tan 20^\circ, \tan 2\alpha = \tan 40^\circ, \tan 3\alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \tan \alpha + \tan 2\alpha = \tan 3\alpha \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha), \therefore \tan 3\alpha - \tan 3\alpha \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha + m \cdot \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha = \sqrt{3}, \therefore \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha + m \cdot \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha = \sqrt{3}, \therefore m = \sqrt{3}$. 故选 D.
9. C 由 $4x^2 y^2 + y^4 = 1$ 得 $x^2 = \frac{1}{4y^2} - \frac{y^2}{4}$, 所以 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4y^2} + \frac{3}{4} y^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{4y^2} \cdot \frac{3}{4} y^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{4y^2} = \frac{3}{4} y^2$, 即 $y^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立. 故选 C.
10. C 由 $e^x > a \ln(ax - 2a) - 2a (a > 0)$, 得 $\frac{e^x}{a} > \ln a + \ln(x-2) - 2, \therefore e^x \ln a + x - \ln a > \ln(x-2) + x - 2 = e^{\ln(x-2)} + \ln(x-2)$. 记 $g(x) = e^x + x$, 易知 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $\therefore g(x - \ln a) > g(\ln(x-2)), \therefore x - \ln a > \ln(x-2), \therefore \ln a < x - \ln(x-2)$, 记 $h(x) = x - \ln(x-2), h'(x) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}, x \in (2, 3)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, $x \in (3, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, $\therefore h(x)_{\min} = h(3) = 3 - \ln 1 = 3, \therefore \ln a < 3, \therefore 0 < a < e^3$. 故选 C.
11. A $\because f(x) = x^3 + ax^2 + b,$
 $\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax = 0$ 两根为 0 和 $-\frac{2}{3}a,$
 $\because f(x) = 0$ 的三个零点, x_1, x_2, x_3 满足: $x_1 < 0 < x_2 < x_3,$
 $\therefore -\frac{2}{3}a > 0$ 即 $a < 0$, 且 $f(0) = b > 0,$
 又 $f(x) = x^3 + ax^2 + b = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
 $\therefore x^3 + ax^2 + b = x^3 + (-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$
 $\therefore \begin{cases} a = -x_1 - x_2 - x_3, \\ x_1x_2x_3 = -b, \\ -x_1 + x_2 = x_3, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2x_2 \\ b = x_2^3 \end{cases} (x_2 > 0) \therefore 3a + b = -6x_2 + x_2^3, \text{ 设 } g(x) = x^3 - 6x (x > 0) g'(x) = 3x^2 - 6, x \in (0, \sqrt{2}) \text{ 时, } g'(x) < 0, x \in (\sqrt{2}, +\infty) \text{ 时, } g'(x) > 0, \therefore g(x) \text{ 在 } (0, \sqrt{2}) \text{ 上单调递减, 在 } (\sqrt{2}, +\infty) \text{ 单调递增, } \therefore x > 0 \text{ 时, } g(x)_{\min} = g(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}, \therefore (3a+b)_{\min} = -4\sqrt{2}. \text{ 故选 A.}$
12. B $f(x) = 2 \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right| + 2 \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right|, [f(x)]^2 = 4 \left(1 + \left| \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right) \right| \right), \therefore f(x) \geq 0,$
 $\therefore f(x) = 2 \sqrt{1 + \left| \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right) \right|}$. 对于 A, $\because f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sqrt{1 + \left| \sin\left(2x + \pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right|} =$

$2\sqrt{1-\left|\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right|}=f(x)$, $\therefore \frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的周期, A 错误; 对于 B, $y=\left|\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)\right|$ 的对称轴方程为 $2x+\frac{2}{3}\pi=\frac{k\pi}{2}$, $\therefore x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ ($k\in\mathbf{Z}$). 即 $x=\frac{(k_1-1)\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{k_1\pi}{4}-\frac{\pi}{12}$ ($k_1\in\mathbf{Z}$). \therefore B 正确. 对于 C, 对 $\forall x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x)\in[2,2\sqrt{2}]$, $\therefore f(x)+\frac{1}{f(x)}\in\left[\frac{5}{2},\frac{9}{4}\sqrt{2}\right]$.

由已知 $af(x_k)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ ($k=1,2$) $x_1, x_2\in\left[-\frac{5}{12}\pi, 0\right]$ 的 $f(x)$ 图象如图所示

$\therefore af(x_k)\in(2a, \sqrt{6}a]\cup[(\sqrt{3}+1)a, 2\sqrt{2}a]$.
 $\therefore \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\sqrt{2}\right]\subseteq(2a, \sqrt{6}a]\cup[(\sqrt{3}+1)a, 2\sqrt{2}a]$.

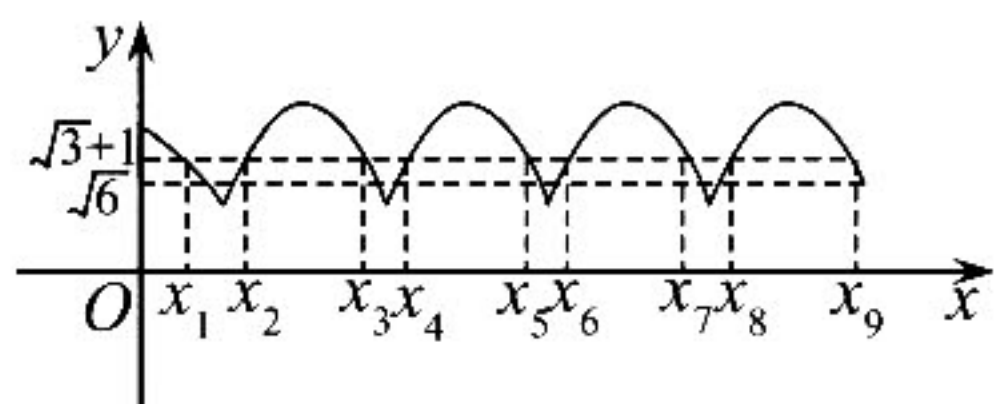
$\therefore \begin{cases} \frac{5}{2}>2a \\ \frac{9}{4}\sqrt{2}\leq\sqrt{6}a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{5}{2}\geq(\sqrt{3}+1)a \\ \frac{9}{4}\sqrt{2}<2\sqrt{2}a \end{cases}$. 无解. \therefore C 错误;



对于 D, $g(x)=0$ 的根为 $f(x)$ 与 $y=-\frac{b}{2}$ 交点横坐标.

\therefore 有奇数个交点, $\therefore \sqrt{6}\leq-\frac{b}{2}\leq\sqrt{3}+1$,

且 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{5\pi}{12}$, $\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{8\pi}{12}$, $\frac{x_4+x_5}{2}=\frac{11\pi}{12}$, $\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{14\pi}{12}$, $\frac{x_6+x_7}{2}=\frac{17\pi}{12}$, $\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{20\pi}{12}$, $\frac{x_8+x_9}{2}=\frac{23\pi}{12}$, $\therefore x_1+2(x_2+x_3+\dots+x_8)+x_9=\frac{50\pi}{3}$, \therefore D 错误. 故选 B.



二、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\sqrt{5} \quad a\cdot(b-a)=a\cdot b-a^2=-1, \therefore a\cdot b=0. \therefore |2a+b|=\sqrt{(2a+b)^2}=\sqrt{4a^2+b^2+4a\cdot b}=\sqrt{5}$.

14. $\sin\frac{2}{3}\pi x$ 答案不唯一. $f(x)=\sin\frac{2}{3}\pi x$.

15. $\frac{\sqrt{6}}{9} \quad f(x)=\cos 2x\cdot\sin x=(1-2\sin^2 x)\cdot\sin x$. 令 $t=\sin x\in(0,1)$, $g(t)=(1-2t^2)t=-2t^3+t$.

$g'(t)=-6t^2+1$, $x\in\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 时, $g'(x)>0$, $x\in\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)$ 时, $g'(x)<0$, $\therefore g(t)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)$ 单调递减. $\therefore g(t)_{\max}=g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

16. 2 由题意知 $0<S\leq x, 0<S\leq\frac{2}{y}$, 则 $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{S}, \frac{y}{2}\leq\frac{1}{S}$, 所以 $S\leq y+\frac{2}{x}\leq\frac{2}{S}+\frac{2}{S}=\frac{4}{S}$, 解得 $0<S\leq 2$, 当且仅当 $\frac{1}{x}=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 S 的最大值为 2.

三、解答题: 共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 因为 $a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$, 所以 $1\geq 2\sqrt{2ab}$, 当且仅当 $a=2b$ 时等号成立,

所以当 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$ 时, $(ab)_{\max}=\frac{1}{8}$ 4 分

(2) $\frac{5}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{a+1}+\frac{2}{2b}\right)(a+1+2b)=\frac{1}{2}\left(7+\frac{10b}{a+1}+\frac{a+1}{b}\right)\geq\frac{7}{2}+\sqrt{10}$ 8 分

当且仅当 $\frac{10b}{a+1}=\frac{a+1}{b}$ 时等号成立,

所以当 $a=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, b=\frac{\sqrt{10}-2}{3}$ 时取最小值 $\frac{7}{2}+\sqrt{10}$ 10 分

18. 解: (1) $\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, 3 分

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$; 6 分

(2) $\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}>\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right), 2\alpha\in\left(\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$

$\because \sin 2\alpha = 2\cos \alpha \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \therefore \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}, \dots\dots\dots 9$ 分

$\therefore \cos(\frac{5}{6}\pi - 2\alpha) = \cos \frac{5\pi}{6} \cos 2\alpha + \sin \frac{5\pi}{6} \sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}, \dots\dots\dots 12$ 分

19. 解: (1) $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + 3\sin 2x - \cos 2x$
 $= 2\sin 2x - 2\cos 2x = 2\sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}), \dots\dots\dots 4$ 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \dots\dots\dots 6$ 分

(2) 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $-\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{8}]$ 上是增函数, 在区间 $[\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ 上是减函数. $\dots\dots\dots 9$ 分

又 $f(0) = -2, f(\frac{3\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$,

$f(\frac{3\pi}{4}) = -2$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 上的最大值为 $2\sqrt{2}$, 最小值为 $-2, \dots\dots\dots 12$ 分

20. 解: (1) 当 $0 < x \leq 30$ 时, $f(x) = 30 < 50$ 恒成立, 公交群体的人均通勤时间不可能少于自驾群体的人均通勤时间;

当 $30 < x < 100$ 时, 若 $50 < f(x)$, 即 $2x + \frac{1800}{x} - 80 > 50$, 解得 $x < 20$ (舍) 或 $x > 45$;

所以当 $45 < x < 100$ 时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间; $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) 设该地上班族总人数为 n , 则自驾人数为 $n \cdot x\%$, 乘公交人数为 $n \cdot (1-x\%)$.

因此人均通勤时间

$$g(x) = \begin{cases} \frac{30n \cdot x\% + 50n(1-x\%)}{n}, & 0 < x \leq 30 \\ \frac{(2x + \frac{1800}{x} - 80)n \cdot x\% + 50n(1-x\%)}{n}, & 30 < x < 100 \end{cases}, \dots\dots\dots 6$$
分

整理得: $g(x) = \begin{cases} 50 - \frac{x}{5}, & 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{50}(x - 32.5)^2 + 46.875, & 30 < x < 100 \end{cases}, \dots\dots\dots 8$ 分

因为 $g(x)$ 在 $(0, 30]$ 和 $(30, 32.5]$ 为减函数;

$g(x)$ 在 $(32.5, 100]$ 为增函数, $g(30) = 44, g(32.5) = 46.875$,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $44, \dots\dots\dots 12$ 分

21. 解: (1) 假设 $f(x)$ 为“准奇函数”, \therefore 存在 x 满足 $f(-x) = -f(x)$,

$\frac{-x-3}{-x+1} = -\frac{x-3}{x+1}$ 有解, 化为 $x^2 + 3 = 0$, 无解, $\therefore f(x)$ 不是“准奇函数”; $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) $g(x) = 3^x + m$ 为定义在 $[-1, 1]$ 的“准奇函数”,

$3^{-x} + m = -3^x - m$ 在 $[-1, 1]$ 上有解, $2m = -(3^x + 3^{-x})$ 在 $[-1, 1]$ 上有解, $\dots\dots\dots 6$ 分

令 $t = 3^x \in [\frac{1}{3}, 3], \therefore 2m = -(t + \frac{1}{t})$ 在 $t \in [\frac{1}{3}, 3]$ 上有解, $\dots\dots\dots 7$ 分

又对勾函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, 3]$ 上单调递增, 且 $t = \frac{1}{3}$ 时, $y = \frac{10}{3}$;

$t = 3$ 时, $y = \frac{10}{3}, \dots\dots\dots 9$ 分

$\therefore y_{\min} = 1 + 1 = 2, y = t + \frac{1}{t}$ 的值域为 $[2, \frac{10}{3}]$, $\dots\dots\dots 10$ 分

$\therefore 2m \in [-\frac{10}{3}, -2], m \in [-\frac{5}{3}, -1]. \dots\dots\dots 12$ 分

22. 解: (1) 当 $a = 0, f(x) = 2e^x - 4ex$

$f'(x) = 2e^x - 4e, \dots\dots\dots 1$ 分

$f'(1) = -2e$

$f(1) = -2e$

\therefore 曲线 $y = f(x)$ 过点 $(1, -2e)$, 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y + 2e = -2e(x - 1)$, 即 $2ex + y = 0, \dots\dots\dots 3$ 分

(2) $f(1) = 2e - 4e + \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}ae - 2e \geq 0 \Rightarrow a \geq 4.$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2e^x - 4e = \frac{2xe^x - 4ex + a}{x},$$

$$\text{令 } \varphi(x) = 2xe^x - 4ex + a,$$

$$\varphi(1) = a - 2e, \varphi'(x) = (2x+2)e^x - 4e, \varphi'(1) = 0,$$

易知 $\varphi'(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增, \therefore 当 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减, $x \in (1, +\infty)$, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增. 5分

1° 当 $a \geq 2e$ 时, $\varphi(x) \geq \varphi(1) \geq 0$, $\therefore f'(x) \geq 0$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 单调递增,

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}ae - a\ln 2 + 2\sqrt{e} - 2e,$$

$$\text{记 } M(x) = \frac{1}{2}ex - x\ln 2 + 2\sqrt{e} - 2e (x \geq 2e),$$

$$M'(x) = \frac{1}{2}e - \ln 2 > 0,$$

$\therefore M(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore M(x) \geq M(2e) = e^2 + 2\sqrt{e} - (2\ln 2 + 2)e > 0$$

$\therefore f(\frac{1}{2}) > 0$, $\therefore x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立. 7分

2° 当 $4 < a < 2e$ 时, 又 $a \in \mathbf{Z}$, 即 $a = 5$ 时, $f(x) = 5\ln x + 2e^x - 4ex + \frac{5}{2}e$,

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e + 2\sqrt{e} - 5\ln 2 > 0, f'(x) = \frac{2xe^x - 4ex + 5}{x},$$

$$\text{记 } h(x) = 2xe^x - 4ex + 5,$$

$h'(x) = (2x+2)e^x - 4e$, $h'(1) = 0$, $h'(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $h(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调

递增, $h(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2e + 5 > 0$, $h(1) = 5 - 2e < 0$, $h(\frac{3}{2}) = 3e^{\frac{3}{2}} - 6e + 5 > 0$,

$$\exists x_1 \in (\frac{1}{2}, 1), x_2 \in (1, \frac{3}{2}), h(x_1) = h(x_2) = 0,$$

$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, x_1)$ 单调递增, 在 (x_1, x_2) 单调递减, $(x_2, +\infty)$ 单调递增, $2x_2e^{x_2} - 4ex_2 + 5 = 0 \Rightarrow e^{x_2} = 2e - \frac{5}{2x_2}$,

$$f(x_2) = 5\ln x_2 + 2e^{x_2} - 4ex_2 + \frac{5}{2}e = 5\ln x_2 - \frac{5}{x_2} - 4ex_2 + \frac{13}{2}e$$

$$\text{令 } N(x) = 5\ln x - \frac{5}{x} - 4ex + \frac{13}{2}e, x \in (1, \frac{3}{2})$$

$$N'(x) = \frac{5x+5-4ex^2}{x^2}$$

$x \in (1, \frac{3}{2})$ 时, $5x+5-4ex^2 < 5+5-4e < 0$, $\therefore N'(x) < 0$, $N(x)$ 单调递减,

$$\therefore N(x) > N(\frac{3}{2}) = 5(\ln 3 - \ln 2) - \frac{10}{3} + \frac{1}{2}e > 0$$

$\therefore x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 10分

3° 当 $a = 4$ 时, $f(x) = 4\ln x + 2e^x - 4ex + 2e$, $f'(x) = \frac{2xe^x - 4ex + 4}{x}$,

$$\text{记 } k(x) = 2xe^x - 4ex + 4, k'(x) = (2x+2)e^x - 4e, k'(1) = 0,$$

易知 $k'(x)$ 单调递增, $\therefore k(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增, $k(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2e + 4 > 0$, $k(1) =$

$$4 - 2e < 0, k(3) = 6e^3 - 12e + 4 > 0,$$

$$\exists x_3 \in (\frac{1}{2}, 1), x_4 \in (1, 3)$$

$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, x_3)$ 上单调递增, (x_3, x_4) 上单调递减, $(x_4, +\infty)$ 上单调递增.

$f(1) = 0$, \therefore 当 $x \in (1, x_4)$ 时, $f(x) < f(1) = 0$ 不符合题意,

$\therefore a$ 的最小值为 5. 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯