

2021年汕头市普通高考第三次模拟考试试题

数 学

本试卷共6页,22小题,满分150分.考试用时120分钟.

考生注意:

1. 答卷前,考生务必将自己的准考证号、姓名等信息填涂在答题卡相应位置上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,监考员将试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷 选择题

一、单项选择题: 本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

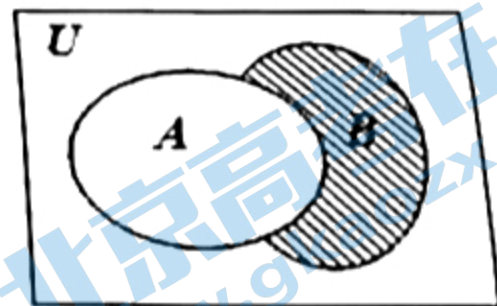
1. 已知复数 $z = \sqrt{3} + i$, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, $z_0 = \frac{\bar{z}}{z}$ z_0 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{y | y = x^2 + 2\}$,

集合 $B = \{x | 9 - x^2 > 0\}$, 则右图阴影部分表示的集合为 ()

- A. $[-3, 2]$ B. $(-3, 2)$
C. $(-3, 2]$ D. $[-3, 2)$



3. 现有红、黄、蓝、绿、紫五只杯子, 将它们叠成一叠, 则在黄色杯子和绿色杯子相邻的条件下, 黄色杯子和红色杯子也相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 “ $S_{n+1} + 2S_{n-1} = 3S_n$ 对 $n \geq 2$ 恒成立” 是 “ $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 满足 $\forall x \in R$, 都有 $f(x) = f(-x)$, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调

递增, 若 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $b = f(\sin 1)$, $c = f(\cos 2)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

6. 区块链作为一种革新的技术, 已经被应用于许多领域, 包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等. 在区块链技术中, 若密码的长度设定为 256 比特, 则密码一共有 2^{256} 种可能, 因此, 为了破解密码, 最坏情况需要进行 2^{256} 次哈希运算. 现在有一台机器, 每秒能进行 2.5×10^{11} 次哈希运算, 假设机器一直正常运转, 那么在最坏情况下, 这台机器破译密码所需时间大约为 () (参考数据 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.477$)

- A. 4.5×10^{65} 秒 B. 4.5×10^{73} 秒 C. 4.5×10^7 秒 D. 28 秒

7. 设 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 双曲线 C 的两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过

点 F 作直线 l_1 的垂线, 分别交 l_1, l_2 于 A, B 两点, 若 A, B 两点均在 x 轴上方且 $|OA| = 3, |OB| = 5$,

则双曲线 C 的离心率 e 为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

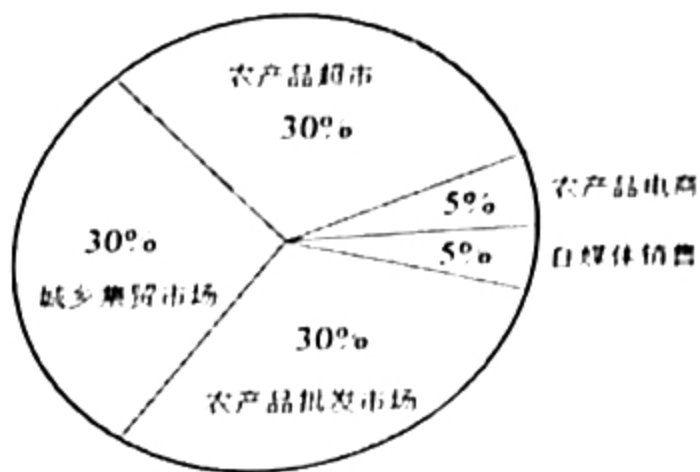
8. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f'(x) - f(x) > 0$, $f(2021) = e^{2021}$,

则不等式 $f\left(\frac{1}{e} \ln x\right) < \sqrt{x}$ 的解集为 ()

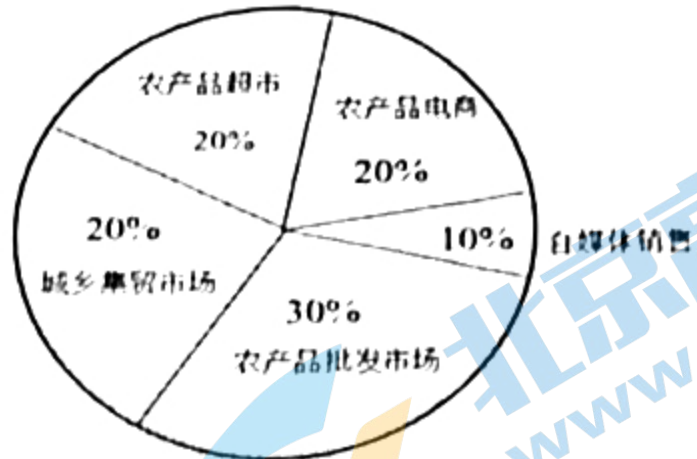
- A. $(e^{2021}, +\infty)$ B. $(0, e^{2021})$ C. $(e^{2021e}, +\infty)$ D. $(0, e^{2021e})$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 为响应国家号召, 打赢脱贫攻坚攻坚战, 某贫困村主要产业是种植蜜柚, 由于销售渠道单一, 导致蜜柚滞销或低价出售. 其定点扶贫单位为帮助该村真正脱贫, 为该村建立多种销售渠道, 一年后该村的蜜柚销售收入增加了一倍, 实现翻番. 为更好地了解该村的蜜柚销售收入变化情况, 统计了该村扶贫前后的蜜柚销售收入构成比例, 得到如下饼图:



扶贫前销售收入构成比例



扶贫后销售收入构成比例

则下面结论中正确的是()

- A. 扶贫后, 该村的城乡集贸市场销售渠道的收入减少 ;
- B. 扶贫后, 该村的自媒体销售渠道的收入增加了一倍以上 ;
- C. 扶贫后, 该村的农产品批发市场销售渠道的收入增加了一倍 ;
- D. 扶贫后, 该村的农产品电商销售渠道收入是扶贫前的四倍.

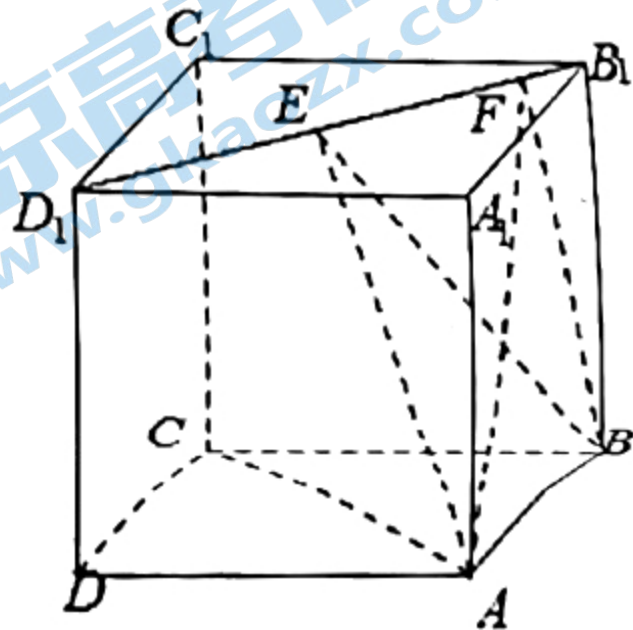
10. 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x (ab \neq 0)$, 且对任意 $x \in R$ 都有 $f(\frac{\pi}{6} - x) = f(\frac{\pi}{6} + x)$, 则以下正确的有()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ 上单调递减
- C. $x = \frac{2\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个零点
- D. $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 如右图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且

$$EF = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ 以下结论正确的有 ()}$$

- A. $AC \perp BE$
- B. 点 A 到平面 BEF 的距离为定值
- C. 三棱锥 $A - BEF$ 的体积是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 体积的 $\frac{1}{12}$
- D. 异面直线 AE, BF 所成的角为定值



12. 画法几何的创始人法国数学家加斯帕尔·蒙日发现: 与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆, 我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, A, B 为椭圆上两

个动点，直线 l 的方程为 $bx + ay - a^2 - b^2 = 0$ 下列说法正确的是()

- A. 椭圆 C 的蒙日圆的方程为 $x^2 + y^2 = 3b^2$
- B. 对直线 l 上任意点 P ， $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$
- C. 记点 A 到直线 l 的距离为 d ，则 $d - |AF_2|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$
- D. 若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 C 相切，则矩形 $MNGH$ 面积的最大值为 $6b^2$.

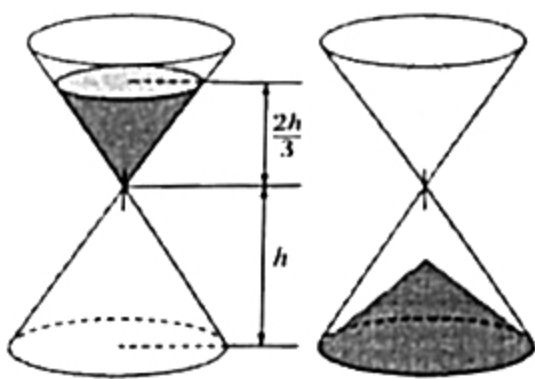
第 II 卷 非选择题

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $y = a^{x-3} + 1 (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A ，若点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ 上，其中 $m > 0, n > 0$ ，则 mn 的最大值为_____.

14. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = \sqrt{2}|b|$ ，且 $(a - b) \perp b$ ，则 a 与 b 的夹角为_____.

15. 沙漏是古代的一种计时装置，它由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成，开始时细沙全部在上部容器中，细沙通过连接管道全部流到下部容器所需要的时间称为该沙漏的一个沙时. 如图，某沙漏由上下两个圆锥组成，圆锥的底面直径和高均为 10 cm，细沙全部在上部时，其高度为圆锥高度的 $\frac{2}{3}$ (细管长度忽略不计).



若细沙全部漏入下部后，恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆，则此锥形沙堆的高度为_____ (精确到 0.01cm).

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-1)a_n = 3^n$ ，则 $a_3 =$ _____，若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_n \geq (-1)^n \lambda$ 恒成立，则 λ 的取值范围为_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $(\sin B + \sin C)^2 = \sin^2 A + 3\sin B \sin C$ ，② $2c = 2a \cos B + b$ ，

③ $b \cos C + c \cos B - 2a \cos A = 0$ 这三个条件中任选一个，补充到下面问题中，并解答问题. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c ，且_____.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，且 $b = 2$ ，求边长 c 的取值范围.

(注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分)

18. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列. 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.5]=0$, $[\lg 499]=2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

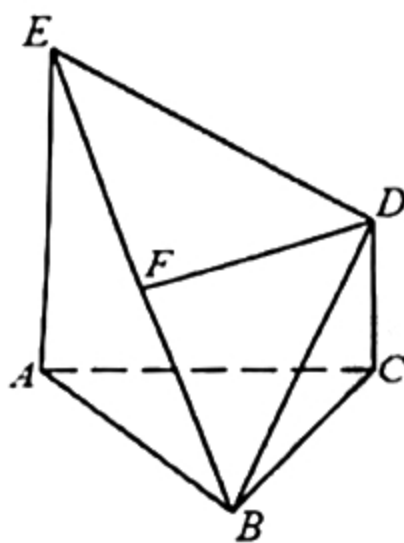
(2) 若 $b_n = [\lg a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 2020 项的和.

19. (本小题满分12分)

已知 $\triangle ABC$ 是正三角形, 线段 AE 和 CD 都垂直于平面 ABC , 且 $AE = 2CD = 2$, F 为 BE 的中点, 设平面 $BDE \cap$ 平面 BDE .

(1) 求证: $DF \parallel l$;

(2) 当平面 BDE 与平面 ABC 所成的锐二面角为 $\frac{\pi}{4}$ 时, 求几何体 $ABCDE$ 的体积.



20. (本小题满分12分)

已知圆 $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$ 与定直线 $l: y = -1$, 且动圆 M 与圆 C 外切并与直线 l 相切.

(1) 求动圆圆心 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 已知点 P 是直线 $l_1: y = -2$ 上一个动点, 过点 P 作轨迹 E 的两条切线, 切点分别为

A, B

①求证: 直线 AB 过定点.

②求证: $\angle PCA = \angle PCB$.

21. (本小题满分12分)

第 13 届女排世界杯于 2019 年 9 月 14 日在日本举行, 共有 12 支参赛队伍, 本次比赛启用了新的排球用球, $MIKSA-V200W$, 已知这种球的质量指标 ξ (单位: g) 服从正态分布 $N(270, 5^2)$.

比赛赛制采取单循环方式,即每支球队进行 11 场比赛(采取 5 局 3 胜制),最后靠积分选出最后冠军,积分规则如下:比赛中以 3:0 或 3:1 取胜的球队积 3 分,负队积 0 分;而在比赛中以 3:2 取胜的球队积 2 分,负队积 1 分.已知第 10 轮中国队对抗塞尔维亚队,设每局比赛中国队取胜的概率为 $p(0 < p < 1)$

(1)若比赛准备了 1000 个排球,请估计质量指标在 $(260, 265]$ 内的排球个数(计算结果取整数).

(2)第 10 轮比赛中,记中国队 3:1 取胜的概率为 $f(p)$.

(i) 求出 $f(p)$ 的最大值点 p_0 ;

(ii)若以 p_0 作为 p 的值,记第 10 轮比赛中,中国队所得积分为 X ,求 X 的分布列及数学期望.

参考数据:若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6826, p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9544$$

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1$, $g(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $f(x) + g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

2021年汕头市普通高考第三次模拟考试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、单项选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	B	B	A	C	D

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	ABC	AD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. (16 题第一空 2 分, 第二空 3 分)

13. $\frac{1}{24}$

14. $\frac{\pi}{4}$

15. 2.96

16. $\frac{18}{5}, [-3, 2]$

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

解: (1) 选条件①.

因为 $(\sin B + \sin C)^2 = \sin^2 A + 3\sin B \sin C$,

所以 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$.

根据正弦定理得, $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 1 分

由余弦定理得, $\cos A = \frac{1}{2}$, 2 分

因为 A 是 $\triangle ABC$ 的内角, 3 分

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

选条件②.

因为 $c = a \cos B + \frac{1}{2}b$, 由余弦定理 $c = a \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{1}{2}b$,1分

整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

由余弦定理得, $\cos A = \frac{1}{2}$,2分

因为 A 是 $\triangle ABC$ 的内角,3分

所以 $A = \frac{\pi}{3}$4分

选条件③.

因为 $b \cos C + c \cos B - 2a \cos A = 0$, *

$\therefore \sin B \cos C + \sin C \cos B - 2 \sin A \cos A = 0$.

$\therefore \sin(B+C) = 2 \sin A \cos A$, 即 $\sin A = 2 \sin A \cos A$ 1分

因为 $0 < A < \pi$, $\therefore \sin A \neq 0$,2分

$\therefore \cos A = \frac{1}{2}$,3分

$\therefore A = \frac{\pi}{3}$ 4分

(2) 因为 $A = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

所以 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$ 5分

在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sin B}$,6分

所以 $c = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}{\sin B} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3} \cos B + \sin B}{\sin B}$,7分

即 $c = \frac{\sqrt{3}}{\tan B} + 1$,8分

由 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$ 可得, $\tan B > \frac{1}{\sqrt{3}}$,

9 分

所以 $0 < \frac{1}{\tan B} < \sqrt{3}$, 所以 $1 < c < 4$

10 分

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列,

所以 $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4}$, 得 $S_n = \frac{n^2+n}{4}$

2 分

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

3 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2+n}{4} - \frac{(n-1)^2+n-1}{4} = \frac{n}{2}$

4 分

又 $a_1 = \frac{1}{2}$ 也适合上式,

所以 $a_n = \frac{n}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$

5 分

(2) $b_n = [\lg a_n] = \left[\lg \frac{n}{2} \right]$,

当 $n=1$ 时, $-1 < \lg a_1 < 0$;

6 分

当 $n=2, 3, 4, \dots, 19$ 时, $0 \leq \lg a_n < 1$;

7 分

当 $n=20, 21, 22, \dots, 199$ 时, $1 \leq \lg a_n < 2$;

8 分

当 $n=200, 201, 202, \dots, 1999$ 时, $2 \leq \lg a_n < 3$;

9 分

当 $n=2000, 2001, \dots, 2020$ 时, $3 \leq \lg a_n < 4$

10 分

故数列 $\{b_n\}$ 的前 2020 项和为

$[\lg a_1] + [\lg a_2] + [\lg a_3] + \dots + [\lg a_{2020}] = -1 + 0 \times 18 + 1 \times 180 + 2 \times 1800 + 3 \times 21 = 3842$

12 分

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 如图所示, 取 AB 中点 G , 连 CG 、 FG .
在 $\triangle ABE$ 中, F 、 G 分别为 BE 、 AB 的中点,

$\therefore FG \parallel \frac{1}{2}EA$

1 分

$\because$ 线段 AE 和 CD 都垂直于平面 ABC , $AE = 2CD$

$\therefore DC \parallel \frac{1}{2}EA$,

2 分

$\therefore FG \parallel DC$.

$\therefore$ 四边形 $CDGF$ 为平行四边形,

$\therefore DF \parallel CG$

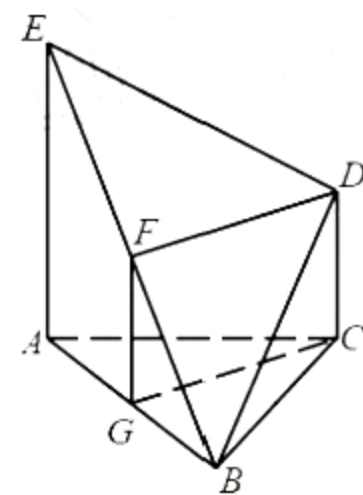
3 分

又 $\because DF \not\subset$ 平面 ABC , $CG \subset$ 平面 ABC , (若没有写面外条件扣 1 分)

$\therefore DF \parallel$ 平面 ABC .

又 $DF \subset$ 平面 BDE ,

4 分



平面 $BDE \cap$ 平面 $ABC = l$, (若没有写交线条件扣 1 分)

$\therefore DF \parallel l$ 5 分

证法 2: 可作出交线 l 利用公理 3 和两个三角形相似证明。

(2) 取 AC 的中点 O , 过点 O 作 $OH \parallel AE$, 则 $OH \perp$ 面 ABC .
因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, 所以 $BO \perp AC$.

以 O 为原点, 分别以 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OH}$ 为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向
建立空间直角坐标系, 设 $AB = 2a$

则 $B(\sqrt{3}a, 0, 0), D(0, a, 1), E(0, -a, 2)$ 6 分

由图可知, 面 ABC 的法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$ 7 分

设面 BDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{ED} = (0, 2a, -1)$, $\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}a, a, 1)$

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{ED} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} 2ay - z = 0 \\ -\sqrt{3}ax + ay + z = 0 \end{cases}$

令 $z = 2a, y = 1, x = \sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, 2a)$ 9 分

因为平面 BDE 与平面 ABC 所成的锐二面角为 $\frac{\pi}{4}$

所以 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2a}{\sqrt{3+1+4a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a = 1, AB = 2$ 10 分

几何体 $ABCDE$ 是四棱锥, 且 $BO \perp$ 面 $ACDE$

所以几何体 $ABCDE$ 的体积 $= \frac{1}{3} \times BO \times S_{\text{梯形}ACDE} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 = \sqrt{3}$ 12 分

证法 2: 直接作出交线 l , 并利用二面角的定义得到 $\angle EBA = \frac{\pi}{4}$

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 解法一: 设 $M(x, y), (y > -1)$, 动圆半径为 $R (R > 0)$,

则依题意有 $\begin{cases} |MC| = R + 1 \\ R = y + 1 \end{cases}$ 2 分

$\therefore \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y + 2$, 化简得: $x^2 = 8y$ 3 分

故: 动圆圆心 M 的轨迹 E 的方程为: $x^2 = 8y$ 4 分

解法二: 依题意知: M 到 C 的距离等于 M 到直线 $y = -2$ 的距离

$\therefore$ 动点 M 的轨迹是以 C 为焦点, 直线 $y = -2$ 为准线的抛物线 2 分

设抛物线方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$, 则 $\frac{p}{2} = 2$

$\therefore p = 4$ 3 分

∴ 抛物线的方程为 $x^2 = 8y$

故：动圆圆心 M 的轨迹 E 的方程为： $x^2 = 8y$ 4 分

(2) ①由 $x^2 = 8y$ 得： $y = \frac{1}{8}x^2$ ∴ $y' = \frac{1}{4}x$ 5 分

设 $A(x_1, \frac{1}{8}x_1^2), B(x_2, \frac{1}{8}x_2^2), P(t, -2), (x_1 \neq x_2)$ ，则

切线 PA 的方程为： $y - \frac{1}{8}x_1^2 = \frac{x_1}{4}(x - x_1)$ 即：

同理，切线 PB 的方程为： $y = \frac{1}{4}x_2x - \frac{1}{8}x_2^2$ 6 分

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x_1x - \frac{1}{8}x_1^2 \\ y = \frac{1}{4}x_2x - \frac{1}{8}x_2^2 \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{x_1x_2}{8} \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} t = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ -2 = \frac{x_1x_2}{8} \end{cases}$ 即： $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2t \\ x_1x_2 = -16 \end{cases}$ 8 分

∴ $A(x_1, \frac{1}{8}x_1^2), B(x_2, \frac{1}{8}x_2^2), (x_1 \neq x_2)$

∴ 直线 AB 的方程为： $y - \frac{1}{8}x_1^2 = \frac{\frac{1}{8}x_2^2 - \frac{1}{8}x_1^2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ，化简得： $y = \frac{x_1 + x_2}{8}x - \frac{x_1x_2}{8}$

即： $y = \frac{t}{4}x + 2$

故，直线 AB 过定点 $(0, 2)$ 9 分

②由①知：直线 AB 的斜率为 $k_{AB} = \frac{t}{4}$

(i) 当直线 PC 的斜率不存在时，直线 AB 的方程为： $y = 2$ ，

∴ $PC \perp AB$ ∴ $\angle PCA = \angle PCB$ 10 分

(ii) 当直线 PC 的斜率存在时，

∵ $P(t, -2), C(0, 2)$ ∴ 直线 PC 的斜率 $k_{PC} = \frac{-2-2}{t-0} = -\frac{4}{t}$

∴ $k_{AB} \cdot k_{PC} = \frac{t}{4} \times \frac{-4}{t} = -1$ 11 分

∴ $PC \perp AB$

∴ $\angle PCA = \angle PCB$

综上所述： $\angle PCA = \angle PCB$ 得证12 分

21. (本小题满分 12 分)

解：(1) ∵ $\xi \sim N(270, 5^2)$

∴ $P(260 < \xi \leq 265) = \frac{P(260 < \xi < 280) - P(265 < \xi < 275)}{2} = \frac{0.9544 - 0.6826}{2} = 0.1359$ 1 分

所以质量指标在 $(260, 265]$ 内的排球个数约 $1000 \times 0.1359 \approx 136$ 个2 分

(2)(i) 前三场赢两场，第四场必赢

则 $f(p) = 3 \times p^3 \times (1-p) = 3(p^3 - p^4)$ 3 分

$$f'(p) = 3p^2(3-4p) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{令 } f'(p) = 0, \text{ 得 } p = \frac{3}{4}, \text{ (} p = 0 \text{ 舍去)}$$

当 $p \in (0, \frac{3}{4})$ 时, $f'(p) > 0$, 函数 $f(p)$ 单调递增,

当 $p \in (\frac{3}{4}, 1)$ 时, $f'(p) < 0$, 函数 $f(p)$ 单调递减,

所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0 = \frac{3}{4}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(ii) X 可能取的值为 0、1、2、3, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$X = 3$, 前三场全赢, 或者前三场赢两场, 第四场必赢.

$$p(X = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{189}{256}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$X = 2, \text{ 前四场赢两场, 第五场必赢. } p(X = 2) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{81}{512}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$X = 1, \text{ 前四场赢两场, 第五场必输. } p(X = 1) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{27}{512}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$X = 0$, 前三场全输, 或者前三场赢一场, 第四场必输.

$$p(X = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{13}{256} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	3	2	1	0
P	$\frac{189}{256}$	$\frac{81}{512}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{13}{256}$

$\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{则 } E(X) = 3 \times \frac{189}{256} + 2 \times \frac{81}{512} + 1 \times \frac{27}{512} + 0 \times \frac{13}{256} = \frac{1323}{512} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (本小题满分 12 分)

证明: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$,

$$\therefore f'(x) = e^x - x - 1, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$f''(x) = e^x - 1 \geq 0$ 恒成立, 故 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 2 分

$\therefore f'(x) \geq f'(0) = 0$, 3 分

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$, 故原式得证. 4 分

(2) $\because f(x) + g(x) = e^x + \cos x - ax - 2$, 令 $h(x) = e^x + \cos x - ax - 2$,

要证原式即证 $h(x) \geq 0$,

$h'(x) = e^x - \sin x - a$, 5 分

$h''(x) = e^x - \cos x$,

$\because e^x \geq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 故 $h''(x) \geq 0$, $\therefore h'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 6 分

$\therefore h'(x) \geq h'(0) = 1 - a$, 7 分

当 $1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $h'(x) \geq 0$, 故 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 8 分

故 $h(x) \geq h(0) = 0$,

此时原式成立故 $a \leq 1$ 满足题意. 9 分

当 $1 - a < 0$, 即 $a > 1$ 时, $h'(0) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h'(x) \rightarrow +\infty$, 故 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 故 $h(x) < h(0) = 0$, 故矛盾, 11 分

所以, 综上所述, $a \leq 1$ 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯