

数 学

2022.3

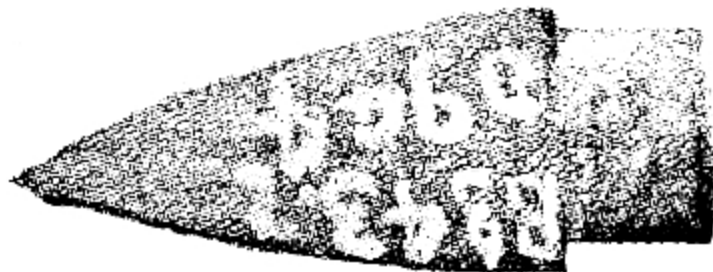
本试卷共 4 页,22 小题,满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡指定位置上,将条形码横贴在答题卡右上角“贴条形码区”。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保持答题卡的清洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 4\}$, 集合 $A = \{0, 1\}$, 则 $\complement_U A =$
 A. $\{0, 2, 3\}$ B. $\{-1, 0, 2, 3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知 $(1 + 3i)z = 5i$, 则 z 的虚部是
 A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
3. 已知 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$
 A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$
4. 下列函数是奇函数,且函数值恒小于 1 的是
 A. $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ B. $f(x) = -x^2 + x$
 C. $f(x) = |\sin x|$ D. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$
5. 下图是战国时期的一个铜铍,其由两部分组成,前段是高为 2 cm、底面边长为 1 cm 的正三棱锥,后段是高为 0.6 cm 的圆柱,圆柱底面圆与正三棱锥底面的正三角形内切,则此铜铍的体积约为



- A. 0.25 cm^3 B. 0.65 cm^3 C. 0.15 cm^3 D. 0.45 cm^3

准考证号

姓名

6. 为提高新农村的教育水平,某地选派 12 名优秀的教师到甲、乙、丙三地进行为期一年的支教活动,每人只能去一个地方,每地至少派一人,则不同的选派方案共有
 A. 18 种 B. 12 种 C. 72 种 D. 36 种

7. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时,发现有这样一列数:1,1,2,3,5,⋯,其中从第三项起,每个数等于它前面两个数的和,即 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^+)$,后来人们把这样的一列数组成的数列 $\{a_n\}$ 称为“斐波那契数列”. 记 $a_{2022} = t$, 则 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021} =$
 A. t^2 B. $t-1$ C. t D. $t+1$

8. 已知当 $x \in (0, +\infty)$ 时,函数 $f(x) = ke^x$ 的图象与函数 $g(x) = \frac{2x}{2x+1}$ 的图象有且只有两个交点,则实数 k 的取值范围是
 A. $(0, \frac{\sqrt{e}}{2e})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 若 $a > b$, 则下列不等式中正确的有

- A. $a-b > 0$ B. $2^a > 2^b$ C. $ac > bc$ D. $a^2 > b^2$

10. 某市为了研究该市空气中的 PM2.5 浓度和 SO₂ 浓度之间的关系,环境监测部门对该市空气质量进行调研,随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 浓度和 SO₂ 浓度(单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$), 得到如下所示的 2×2 列联表:

	SO ₂		
		[0, 150]	(150, 475]
PM2.5	[0, 75]	64	16
	(75, 115]	10	10

经计算 $k = \frac{100 \times (64 \times 10 - 16 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 74 \times 26} \approx 7.4844$, 则可以推断出

- A. 该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 $75 \mu\text{g}/\text{m}^3$, 且 SO₂ 浓度不超过 $150 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 的概率估计值是 0.64
 B. 若 2×2 列联表中的天数都扩大到原来的 10 倍, K^2 的观测值不会发生变化
 C. 有超过 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关
 D. 在犯错的概率不超过 1% 的条件下, 认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P 是线段 BD_1 上(不含端点)的任意一点, 点 E 是线段 A_1B 的中点, 点 F 是平面 $ABCD$ 内一点, 则下面结论中正确的有

A. $CD \parallel$ 平面 PBC_1

B. 以 A_1 为球心、 $\sqrt{2}$ 为半径的球面与该正方体侧面 DCC_1D_1 的交线长是 $\frac{\pi}{2}$

C. $|EP| + |PF|$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $|EP| + |PF|$ 的最小值是 $\frac{2}{3}$

12. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, 过点 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2, l_1 与 C 相交于 A, B 两点, l_2 与 C 相交于 E, D 两点, M 为 A, B 中点, N 为 E, D 中点, 直线 l 为抛物线 C 的准线, 则

A. 点 M 到直线 l 的距离为定值

B. 以 $|AB|$ 为直径的圆与 l 相切

C. $|AB| + |DE|$ 的最小值为 32

D. 当 $|MN|$ 最小时, $MN \parallel l$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (-1, -2), b = (-x, 3)$, 若 $a \parallel b$, 则 $x =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}, g(x) = -\ln x$, 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 若 $h(x)$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过原点 O 的直线 l 交椭圆 C 于点 A, B , 且 $2|FO| = |AB|$, 若 $\angle BAF = \frac{\pi}{6}$, 则椭圆 C 的离心率是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{3} + x) = f(\frac{\pi}{3} - x), f(-\frac{\pi}{3}) = 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2})$ 上有且只有一个极大值点, 则 ω 的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $8a_3 = a_6, a_2 + a_5 = 36$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 并证明: $T_n < \frac{1}{3}$.

18. (本小题满分 12 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C = \sin^2 A$.

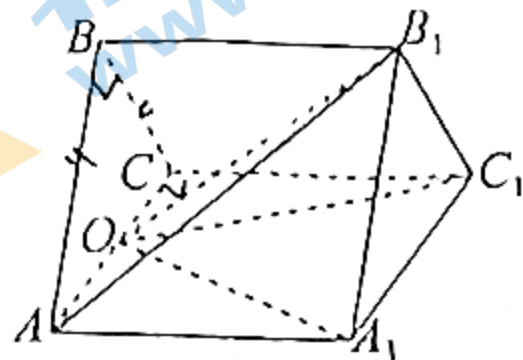
(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $\angle ABC = 90^\circ$, $AB \perp BC$, 四边形 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC = 60^\circ$, O 是 AC 的中点.

- (1) 证明: $BC \perp$ 平面 B_1OA_1 ;
 (2) 求二面角 $A-OB_1-C_1$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

中医药传承数千年,治病救人济苍生. 中国工程院院士张伯礼在接受记者采访时说:“中医药在治疗新冠肺炎中发挥了核心作用,能显著降低轻症病人发展为重症病人的几率. 对改善发热、咳嗽、乏力等症状,中药起效非常快,对肺部炎症的吸收和病毒转阴都有明显效果.” 2021 年 12 月某地爆发了新冠疫情,医护人员对确诊患者进行积极救治. 现有 6 位症状相同的确诊患者,平均分成 A, B 两组, A 组服用甲种中药, B 组服用乙种中药. 服药一个疗程后, A 组中每人康复的概率都为 $\frac{13}{15}$, B 组 3 人康复

的概率分别为 $\frac{9}{10}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$.

- (1) 设事件 C 表示 A 组中恰好有 1 人康复, 事件 D 表示 B 组中恰好有 1 人康复, 求 $P(CD)$;
 (2) 若服药一个疗程后, 每康复 1 人积 2 分, 假设认定: 积分期望值越高药性越好, 请问甲、乙两种中药哪种药性更好?

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 实轴长是 8.

- (1) 求双曲线 C 的方程;
 (2) 过点 $P(0, 3)$ 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同的两点 A 和 B , 若直线 l 上存在不同于点 P 的点 D 满足 $|PA| \cdot |DB| = |PB| \cdot |DA|$ 成立, 证明: 点 D 的纵坐标为定值, 并求出该定值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = axe^{ax} + (a+b)x, g(x) = (1+x)\ln x$.

- (1) 当 $a = -b = 1$ 时, 证明: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > g(x)$;
 (2) 若对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都 $\exists b \in [-1, 0]$, 使 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。