

人大附中 2024 届高三暑假自主复习检测练习

数 学

命题人：战景林 侯立伟 吴中才 薛坤 审题人：战景林 侯立伟

说明：本试卷 21 道题，共 150 分；考试时间 120 分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将条形码贴在答题卡的相应位置上。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 - |y| \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $[1, 2]$ D. $[-2, 3]$
2. 已知复数 z 的实部与虚部相等, 且 $|z| = 2$, 则 z 可能是 ()
A. $1 - i$ B. $-1 - i$ C. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ D. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
3. 下列函数中, 在区间 $(0, 1)$ 内不单调的是 ()
A. $y = \ln(x+1)$ B. $y = 2^{1-x}$ C. $y = \tan 2x$ D. $y = x^2 + \sqrt{x}$
4. 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot b = \frac{1}{2}$, 则 $|2a - b| =$ ()
A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
5. 已知直线 $y = kx + 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle OAB$ 是锐角三角形, 则实数 k 的取值范围是 ()
A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $a \sin A - b \sin B = c(\sin B + \sin C)$, 则 A 的大小为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号：bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

7. “三分损益法”是古代中国发明制定音律的方法，其基本原理是以第一根琴弦为基准，取此琴弦长度的 $\frac{2}{3}$ 得到第二根琴弦，取第二根琴弦长度的 $\frac{4}{3}$ 得到第三根琴弦，取第三根琴弦长度的 $\frac{2}{3}$ 得到第四根琴弦，取第四根琴弦长度的 $\frac{4}{3}$ 得到第五根琴弦。其中，第一、三、五、二、四根琴弦发出的声音分别称为“宫、商、角(ju6)、徵(zh1)、羽”，则下列声音对应的琴弦长度成等比数列的是（ ）
- A. 宫、商、角
B. 商、角、徵
C. 角、徵、羽
D. 宫、角、羽

8. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则“ $\{S_n\}$ 为递减数列”是“ $\{a_n\}$ 为递减数列”的（ ）
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 - 2ax), & x \geq 3 \\ -2, & x < 3 \end{cases}$ ，的定义域为 D ，若存在 $x_0 \in D$ ，满足 $f(-x_0) = -f(x_0)$ ，

则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, \frac{3}{2})$
B. $[\frac{5}{6}, +\infty)$
C. $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup [\frac{5}{6}, +\infty)$
D. $[\frac{5}{6}, \frac{3}{2})$
10. 已知曲线 $C: \frac{x|x|}{9} + \frac{y|y|}{4} = 1$ ，给出下列三个结论：

- ①曲线 C 不经过第三象限；
②存在无数条直线与曲线 C 不相交；
③若直线 $y = kx + 2$ 与曲线 C 有3个不同的交点，则 k 的取值范围是 $(-\frac{2}{3}, 0)$ 。

其中，所有正确结论的序号是（ ）

- A. ①
B. ②
C. ①②
D. ①②③

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号：bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

二. 填空题 (本大题共 5 小题; 每小题 5 分, 共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

11. 不等式 $\frac{4x-3}{x-1} \geq 0$ 的解集为 _____.

12. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 展开式中常数项为 _____.

13. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos \omega x, (\omega > 0)$.

(1) 函数 $f(x)$ 的最大值为 _____;

(2) 给出一个 ω 的值, 使得 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 后得到的函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称, $\omega =$ _____.

14. 已知点 P 是抛物线 $E: y^2 = 8x$ 上一点, $A(-2, 0), B(2, 0)$, 则 $\frac{|PB|}{|PA|}$ 的最小值为 _____,

此时, 点 P 到坐标原点的距离为 _____.

15. 如图, 在棱长为 3 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在线段 AD_1 和 A_1B 上. 给出

下列四个结论:

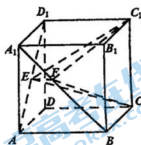
① EF 的最小值为 $\sqrt{3}$;

② 有且仅有一条直线 EF 与 AD_1 垂直;

③ 有且仅有一条直线 EF 与平面 $ABCD$ 平行;

④ 存在无数组点 E, F , 使得二面角 $E - CC_1 - F$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

其中, 所有正确结论的序号是 _____.



关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

三. 解答题 (本大题共 6 道小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程. 请在答题纸上的相应位置作答.)

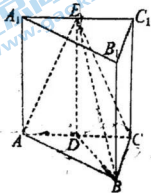
16. (本小题分 13)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , D, E 分别为 AC, A_1C_1 的中点,

$$AB = BC = \sqrt{5}, \quad AC = AA_1 = 2.$$

(I) 求证: $AC \perp$ 平面 BDE ;

(II) 求直线 CE 与平面 ABE 所成角的正弦值.



17. (本小题 13 分)

设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{A^2+1}}{2} \sin(2\omega x + \varphi)$, $(A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$, 且 $f(x)$ 图象的相

邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知,

使得 $f(x)$ 存在且唯一.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若 $f(x)$ 图象的对称轴只有一条落在区间 $[0, a]$ 上, 求 a 的取值范围.

条件①: $f(x) = f(-x)$;

条件②: $f(x)$ 的最大值为 1;

条件③: $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$;

注: 如果选择的条件不符合要求, 得 0 分; 如果选择多组条件分别解答, 按第一组解答计分.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

18. (本小题 15 分)

根据国家高考改革方案,普通高中学业水平等级性考试科目包括政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门,考生可根据报考高校要求和自身特长,从 6 门等级性考试科目中自主选择 3 门科目参加考试,在一个学生选择的三个科目中,若有两个或三个是文史类(政治、历史、地理)科目,则称这个学生选择科目是“偏文”的,若有两个或三个是理工类(物理、化学、生物)科目,则称这个学生选择科目是“偏理”的.

为了解同学们的选课意向,从人大附中高一年级中随机选取了 20 名同学(记为 a_i , $i=1, 2, \dots, 19, 20$, 其中 $a_1 \sim a_{10}$ 是男生, $a_{11} \sim a_{20}$ 是女生),每位同学都各自独立地填写了拟选课程意向表,所选课程统计记录如表:

学生 科目	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
政治		1	1						1		1	1			1		1	1	1	
历史					1		1	1				1	1	1	1	1			1	1
地理			1	1		1	1		1			1	1				1		1	1
物理	1	1		1	1	1			1	1	1		1	1	1	1		1		
化学	1		1	1			1	1		1	1					1		1		
生物	1	1			1	1		1		1				1			1			1

(I) 从上述 10 名男同学中随机选取 2 名同学,求恰有 2 名同学选择科目是“偏理”的概率;

(II) 从人大附中高一年级中任选 2 名同学,以频率估计概率,记 X 为“偏文”女生的人数,求 X 的分布列和数学期望;

(III) 从样本男、女生中各随机选一个人,记他们的选科偏向分别为 ξ_1 、 ξ_2 .

$$\text{且 } \xi_i = \begin{cases} 0, & \text{选择科目“偏理”} \\ 1, & \text{选择科目“偏文”} \end{cases}, (i=1, 2)$$

试比较方差 $D(\xi_1)$ 与 $D(\xi_2)$ 的大小.(只需写出结论) 获取更多试题资料及排名分析信息.

19. (本小题 14 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是 $2\sqrt{2}$, 以其短轴为直径的圆过椭圆的

焦点.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过椭圆 E 左焦点作不与坐标轴垂直的直线, 交椭圆于 M, N 两点, 线段 MN 的垂直平分线与 y 轴负半轴交于点 Q , 若点 Q 的纵坐标的最大值是 $-\frac{1}{3}$, 求 $|MN|$ 的最小值.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a, g(x) = xe^x - 2x$.

(I) 若 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间;

(III) 已知 $a=1$, 当 $x \in (0, +\infty)$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小, 并给予证明.

21. (本小题 15 分)

已知无穷数列 $\{x_n\}$ 的每一项均不为 0, 且满足 $x_n x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2} = x_n^2 + x_{n+1}^2$,

$x_1 = a, x_2 = b$.

(I) 若 $a=1, b=2$, 直接写出 x_3 与 x_1, x_4 与 x_2 的大小关系;

(II) 当 $a \neq b$ 时, 设向量 $\alpha_n = (x_n, x_{n+1}), n=1, 2, \dots$, 判断数列 $\{|\alpha_n|\}$ 是否具有单调性? 如果具有单调性, 请证明; 如果不具有单调性, 举出反例;

(III) 对于给定的 a, b , 是否存在正实数 k , 使得对于任意的 $n \geq 1, n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $|x_n| < k$, 若存在, 求出 k 的取值集合, 若不存在, 说明理由.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通