

# 贵州省 2023 年普通高等学校招生适应性测试

## 理科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $z = \frac{3+i^3}{1+i}$  在复平面上对应的点位于

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

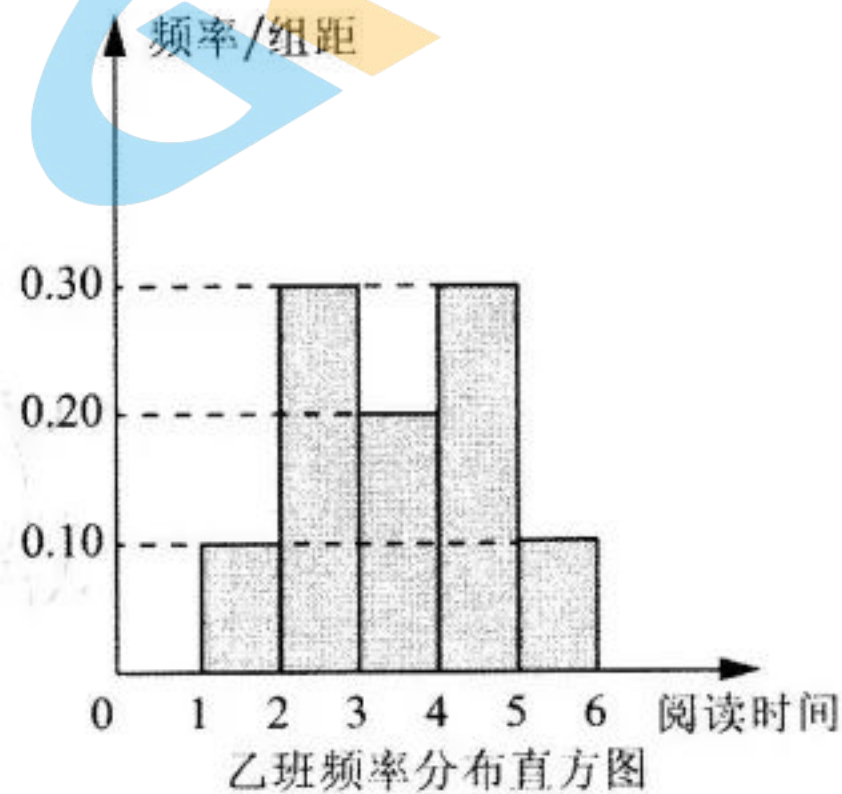
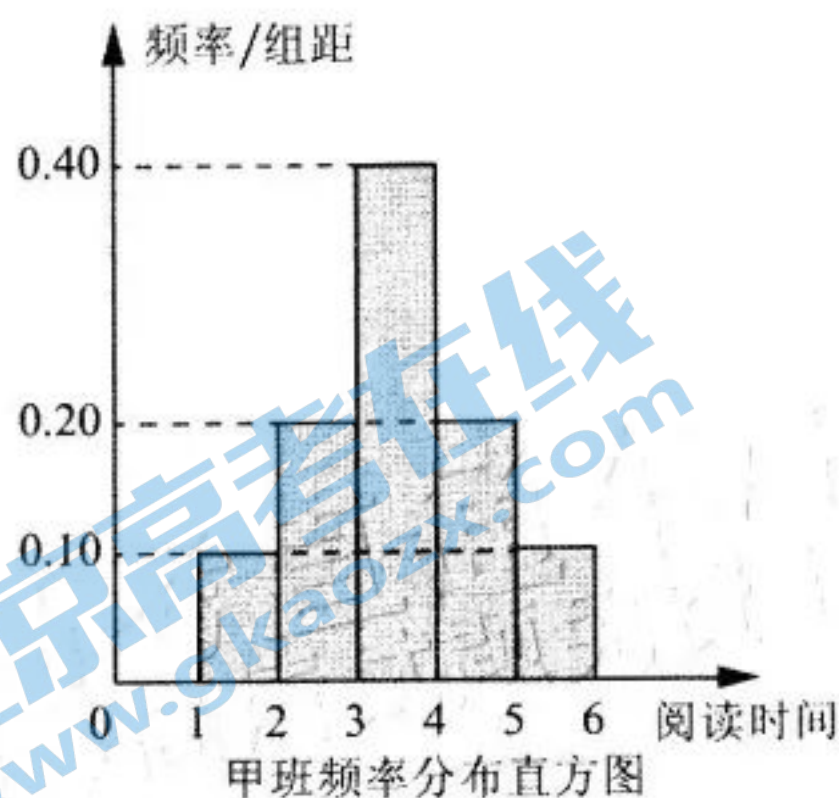
2. 设  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{0, 1\}$       B.  $\{0, 3\}$       C.  $\{1, 2\}$       D.  $\{2, 3\}$

3. 实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x - y \leq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值是

- A. 0      B. 2      C. 3      D. 4

4. 某校为了解高一学生一周课外阅读情况, 随机抽取甲, 乙两个班的学生, 收集并整理他们一周阅读时间 (单位: h), 绘制了下面频率分布直方图。根据直方图, 得到甲, 乙两校学生一周阅读时间的平均数分别为  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , 标准差分别为  $s_1, s_2$ , 则



A.  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, s_1 > s_2$

B.  $\bar{x}_1 < \bar{x}_2, s_1 < s_2$

C.  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, s_1 > s_2$

D.  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, s_1 < s_2$



5. 已知函数  $f(x) = |x-1| - 1$ ，下列结论正确的是

- A.  $f(x)$  是偶函数
- B.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增
- C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称
- D.  $f(x)$  的图象与  $x$  轴围成的三角形面积为 2

6. 在直角坐标系  $xOy$  中，锐角  $\alpha$  的顶点为坐标原点，始边与  $x$  轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点  $A(x_0, y_0)$ ，若  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 7$ ，则  $y_0 =$

- A.  $\frac{1}{3}$
- B.  $\frac{3}{5}$
- C.  $\frac{3}{4}$
- D.  $\frac{4}{5}$

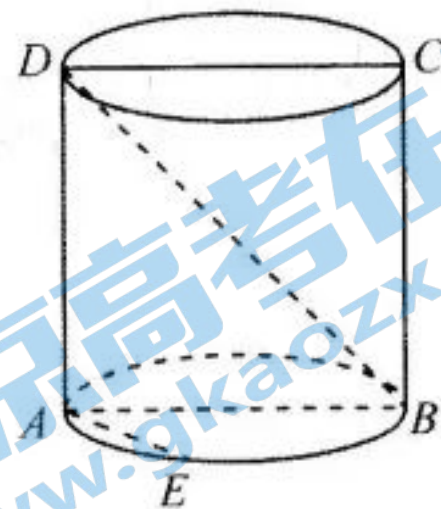
7. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = 3$ 。若点  $P$  满足  $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$ ，则

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} =$

- A. 0
- B.  $\frac{1}{3}$
- C.  $\frac{2}{3}\sqrt{13}$
- D.  $\frac{14}{3}$

8. 如图，圆柱的底面直径  $AB$  与母线  $AD$  相等， $E$  是弧  $AB$  的中点，则  $AE$  与  $BD$  所成的角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$
- B.  $\frac{\pi}{4}$
- C.  $\frac{\pi}{3}$
- D.  $\frac{\pi}{2}$



9. 某工厂产生的废气经过过滤后排放，已知在过滤过程中的污染物的残留含量  $P$  (单位:

$mg/L$ ) 与过滤时间  $t$  (单位:  $h$ ) 之间的函数关系为  $P = P_0 e^{-kt}$ ，其中  $e$  是自然对数

的底数， $k$  为常数， $P_0$  为原污染物总量。若前 5 个小时废气中的污染物被过滤掉了 10%，

则污染物被过滤掉了 80% 所需时间约为 ( $\ln 0.2 \approx -1.609, \ln 0.9 \approx -0.105$ )

- A. 73h
- B. 75h
- C. 77h
- D. 79h

10. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点为  $A$ ， $F$  是  $C$  的一个焦点，点  $B$  在  $C$  上，若

$3\overrightarrow{AF} + 5\overrightarrow{BF} = \mathbf{0}$ ，则  $C$  的离心率为

- A.  $\frac{1}{2}$
- B.  $\frac{3}{5}$
- C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



11. 将函数  $f(x) = \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 的图象向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位后得到函数  $g(x)$  的图象. 若

$g(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{4}, 0)$  对称, 且在  $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$  上单调递减, 则  $\omega =$

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C. 1                      D. 2

12. 设  $a = \ln 2$ ,  $b = \sqrt{3} - 1$ ,  $c = \sin 1$ , 则

- A.  $c > b > a$               B.  $c > a > b$               C.  $b > c > a$               D.  $a > b > c$

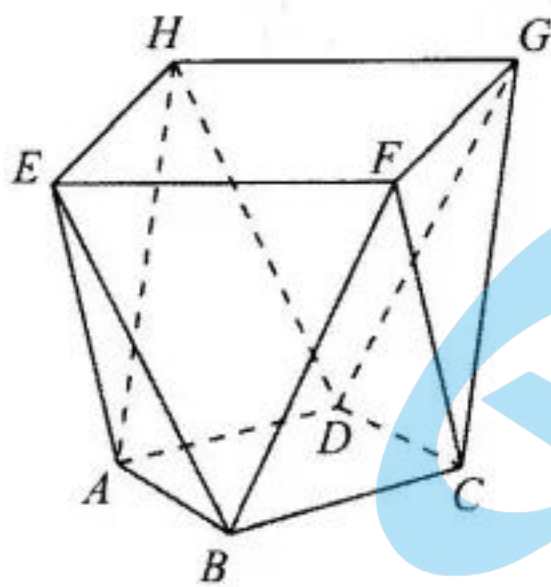
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $(\frac{1}{2x} - \sqrt{x})^6$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_.

14. 已知圆  $M: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ , 双曲线  $N: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ . 倾斜角为锐角的直线  $l$  过  $M$  的圆心, 且与  $N$  的一条渐近线平行, 则  $l$  的方程为\_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在  $BC$  边上,  $BD = 2DC$ . 若  $AB = 2$ ,  $\sin \angle BAD = 3 \sin \angle CAD$ , 则  $AC =$ \_\_\_\_\_.

16. 如图, 某环保组织设计一款苗木培植箱, 其外形由棱长为 2 (单位: m) 的正方体截去四个相同的三棱锥 (截面为等腰三角形) 后得到. 若将该培植箱置于一球形环境中, 则该球表面积的最小值为\_\_\_\_\_  $m^2$ .



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

公比为  $q$  的等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n + a$ .

(1) 求  $a$  与  $q$  的值;

(2) 若  $b_n = \log_2 a_n$ , 记数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \dots + \frac{1}{T_{n+1}}$ .



18. (12分)

矩形  $ABCD$  中,  $AB=4$ ,  $AD=3$  (如图 1), 将  $\triangle DAC$  沿  $AC$  折起到  $\triangle D_1AC$  的位置. 点  $D_1$  在平面  $ABC$  上的射影  $E$  在  $AB$  边上, 连结  $D_1B$  (如图 2).

(1) 证明:  $AD_1 \perp BC$ ;

(2) 过直线  $D_1E$  的平面  $\alpha$  与  $BC$  平行, 求  $D_1C$  与  $\alpha$  所成角的正弦值.



图1

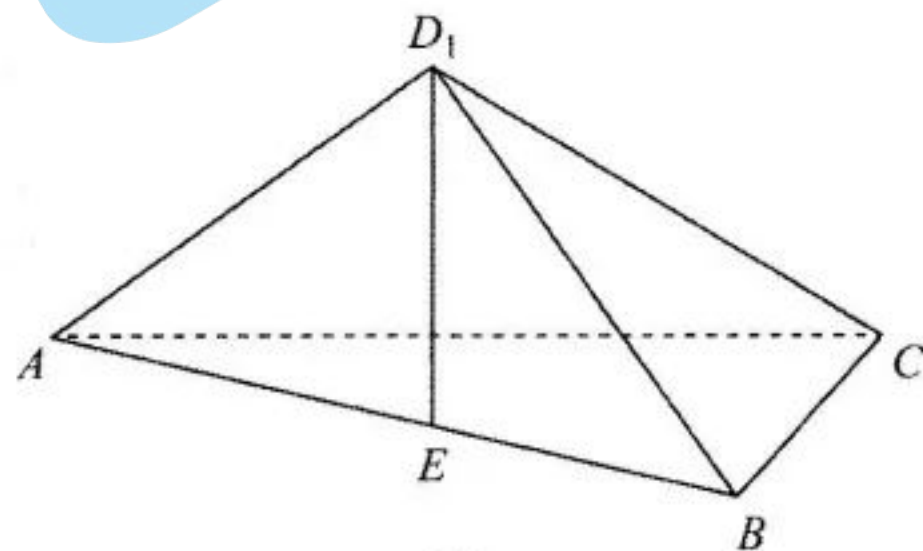


图2

19. (12分)

为普及航空航天科技相关知识、发展青少年航空航天科学素养, 贵州省某中学组织开展“筑梦空天”航空航天知识竞赛. 竞赛试题有甲、乙、丙三类 (每类题有若干道), 各类试题的每题分值及小明答对概率如下表所示, 各小题回答正确得到相应分值, 否则得 0 分, 竞赛分三轮答题依次进行, 各轮得分之和即为选手总分.

题型	项目	每小题分值	每小题答对概率
甲类题		10	$\frac{3}{4}$
乙类题		20	$\frac{2}{3}$
丙类题		30	$\frac{1}{2}$

其竞赛规则为:

第一轮, 先回答一道甲类题, 若正确, 进入第二轮答题; 若错误, 继续回答另一道甲类题, 该题回答正确, 同样进入第二轮答题, 否则, 退出比赛.

第二轮, 在乙类题或丙类题中选择一道作答, 若正确, 进入第三轮答题; 否则, 退出比赛.

第三轮, 在前两轮未作答的那一类试题中选择一道作答.

小明参加竞赛, 有两种方案选择, 方案一: 先答甲类题, 再答乙类题, 最后答丙类题; 方案二: 先答甲类题, 再答丙类题, 最后答乙类题. 各题答对与否互不影响.

请完成以下解答:

(1) 若小明选择方案一, 求答题次数恰好为 3 次的概率;

(2) 经计算小明选择方案一所得总分的数学期望为  $\frac{125}{4}$ , 为使所得总分的数学期望

最大, 小明该选择哪一种方案? 并说明理由.



20. (12分)

过点  $S(4, 0)$  的直线  $l$  与抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点,  $OA \perp OB$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 在  $x$  轴上是否存在点  $T$ , 使得直线  $TA$  与直线  $TB$  的斜率之和为定值  $k$ . 若存在, 求出点  $T$  的坐标和定值  $k$ ; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x + x$ ,  $g(x) = ax^2 + 2x + 1$ .

(1) 当  $a = \frac{1}{2}$  时, 讨论函数  $F(x) = f(x) - g(x)$  的单调性;

(2) 当  $a < 0$  时, 求曲线  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的公切线方程.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=t, \\ y=\frac{\lambda}{t} \end{cases}$  ( $t$  为参数，常数  $\lambda > 0$ )，以坐标

原点为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线  $l$  的方程为  $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = 2$ .

(1) 写出  $C$  的极坐标方程和  $l$  的直角坐标方程；

(2) 若直线  $\theta = \frac{\pi}{12}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ) 和  $C$  相交于  $A, B$  两点，以  $AB$  为直径的圆与直线  $l$  相切，求  $\lambda$  的值.

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

设  $a > 0, b > 0$ ，已知函数  $f(x) = |x+a| + |x-b|$  的最小值为 2.

(1) 求证：  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 3$ ；

(2)  $\forall t \in \mathbf{R}$ ，求证：  $\frac{\sin^4 t}{a} + \frac{\cos^4 t}{b} \geq \frac{1}{2}$ .



# 贵州省模理科答案

贵州省 2023 年普通高等学校招生适应性测试

## 理科数学参考答案及评分建议

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	C	D	C	B	B	C	C	A	B	A

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13.  $\frac{15}{4}$

14.  $x - 2y - 5 = 0$

15. 3

16.  $\frac{41\pi}{4}$

三、解答题

（一）必考题

17. 解：

（1）已知  $S_n = 2^n + a$ .

当  $n=1$  时， $a_1 = S_1 = 2 + a$ ； ..... 1 分

当  $n \geq 2$  时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$ . ..... 4 分

由数列  $\{a_n\}$  为等比数列，可得  $2 + a = 1$ ，即  $a = -1$ .

又  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$ ，所以  $q = 2$ . ..... 6 分

（2）因为  $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n - 1$ .

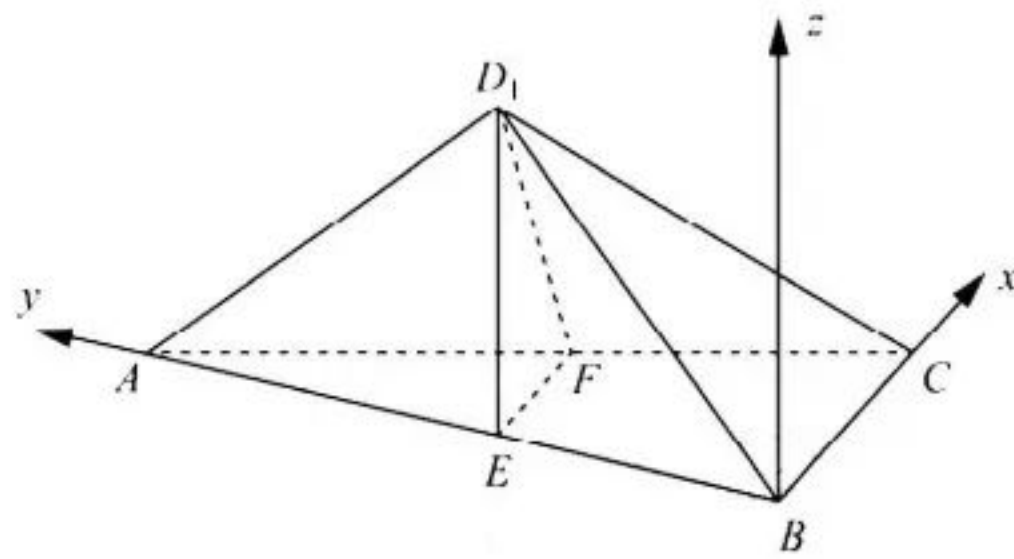
所以  $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0 + 1 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ . ..... 8 分

所以  $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_n} = 2 \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} \right)$   
 $= 2 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$   
 $= 2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$ . ..... 12 分



18. 解:

- (1) 由题意知:  $D_1E \perp$  平面  $ABC$ ,  $BC \subset$  平面  $ABC$ ,  
 所以  $D_1E \perp BC$ . ..... 2 分  
 又  $BC \perp AB$ ,  $AB \subset$  平面  $D_1AB$ ,  $D_1E \subset$  平面  $D_1AB$ , 且  $AB \cap D_1E = E$ ,  
 所以  $BC \perp$  平面  $D_1AB$ . ..... 5 分  
 又  $AD_1 \subset$  平面  $D_1AB$ , 故  $BC \perp AD_1$ , 即  $AD_1 \perp BC$ . ..... 6 分
- (2) 过  $E$  作  $EF \parallel BC$  交  $AC$  于  $F$ , 连结  $D_1F$ ,  
 由于  $EF \parallel BC$ ,  $BC \not\subset$  平面  $D_1EF$ ,  $EF \subset$  平面  $D_1EF$ ,  
 所以  $BC \parallel$  平面  $D_1EF$ . 故平面  $D_1EF$  即为平面  $\alpha$ . ..... 8 分  
 建立如图所示空间直角坐标系.



由于  $AB \perp BC$ ,  $EF \parallel BC$ , 故  $AB \perp EF$ .  
 又  $AB \perp D_1E$ ,  $EF \subset \alpha$ ,  $D_1E \subset \alpha$ ,  $D_1E \cap EF = E$ .  
 因此  $AB \perp \alpha$ , 故  $\overrightarrow{BA}$  是  $\alpha$  的一个法向量.  
 由 (1) 易知  $D_1A \perp D_1B$ , 则在  $\triangle ABD_1$  中可得

$$D_1B = \sqrt{AB^2 - D_1A^2} = \sqrt{7}, D_1E = \frac{3\sqrt{7}}{4}, BE = \frac{7}{4}$$

$$\text{则 } A(0,4,0), C(3,0,0), D_1(0, \frac{7}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4}).$$

$$\overrightarrow{BA} = (0,4,0), \overrightarrow{D_1C} = (3, -\frac{7}{4}, -\frac{3\sqrt{7}}{4}). \dots\dots 10 \text{ 分}$$

设  $D_1C$  与  $\alpha$  所成角为  $\theta$ , 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{D_1C} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{D_1C}|}{|\overrightarrow{BA}| \times |\overrightarrow{D_1C}|} = \frac{|0 \times 3 + 4 \times (-\frac{7}{4}) + 0 \times (-\frac{3\sqrt{7}}{4})|}{4 \times 4} = \frac{7}{16}.$$

$$\text{即 } D_1C \text{ 与平面 } \alpha \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{7}{16}. \dots\dots 12 \text{ 分}$$



19. 解:

(1) 记事件  $A =$  “小明先答对甲类一道试题”,  $B =$  “小明继续答对另一道甲类试题”,  
 $C =$  “小明答对乙类试题”,  $D =$  “小明答对丙类试题”,

$$\text{则 } P(A) = P(B) = \frac{3}{4}, P(C) = \frac{2}{3}, P(D) = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

记事件  $E =$  “小明答题次数恰好为3次”, 则  $E = (AC) \cup (\bar{A}\bar{B}C)$ .

$$P(E) = P(AC) + P(\bar{A}\bar{B}C) = P(A)P(C) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{16},$$

即小明答题次数恰好为3次的概率为  $\frac{9}{16}$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设小明竞赛得分为  $X$ , 由方案二知  $X$  的可能值为 0, 10, 40, 60.

$$P(X=0) = P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=10) = P(\bar{A}D) + P(\bar{A}\bar{B}D) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$$

$$P(X=40) = P(ADC) + P(\bar{A}BDC) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{32}$$

$$P(X=60) = P(ADC) + P(\bar{A}BDC) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{32}$$

$$E(X) = 10 \times \frac{15}{32} + 40 \times \frac{5}{32} + 60 \times \frac{10}{32} = \frac{475}{16} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为  $\frac{125}{4} > \frac{475}{16}$ , 所以选择方案一.  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 解:

(1) 设直线  $l$  的方程为  $x = my + 4$ , 代入  $y^2 = 2px$  并整理得  $y^2 - 2mpy - 8p = 0$ .

$$\Delta = (-2mp)^2 + 32p = 4m^2p^2 + 32p > 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1y_2 = -8p, x_1x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{64p^2}{4p^2} = 16, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } OA \perp OB \text{ 得 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0, \text{ 即 } x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

$$\text{所以 } 16 - 8p = 0, \text{ 即 } p = 2, \text{ 故抛物线的方程为 } y^2 = 4x. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



(2) 假设存在满足条件的点  $T(t,0)$ , 使  $k_{TA} + k_{TB} = k$ .

由 (1) 知  $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -16$ , 所以

$$\begin{aligned} k &= k_{TA} + k_{TB} = \frac{y_1}{x_1 - t} + \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1(my_2 + 4 - t) + y_2(my_1 + 4 - t)}{(my_1 + 4 - t)(my_2 + 4 - t)} \\ &= \frac{2my_1 y_2 + (4 - t)(y_1 + y_2)}{m^2 y_1 y_2 + m(4 - t)(y_1 + y_2) + (4 - t)^2} \\ &= \frac{-32m + 4(4 - t)m}{-16m^2 + 4m^2(4 - t) + (4 - t)^2} = \frac{-4m(t + 4)}{-4m^2 t + (4 - t)^2} \end{aligned} \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

化简可得:  $4tkm^2 - 4(t + 4)m - k(4 - t)^2 = 0$ .

因为上式对  $m \in \mathbf{R}$  恒成立, 所以 
$$\begin{cases} tk = 0, \\ t - 4 = 0, \\ k(4 - t)^2 = 0, \end{cases}$$

解得  $t = -4, k = 0$ .

所以, 在  $x$  轴上存在点  $T(-4,0)$ , 使得直线  $TA$  与直线  $TB$  的斜率之和为 0.

..... 12 分

21. 解:

(1) 当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $F(x) = f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \quad (x \in \mathbf{R})$

$F'(x) = e^x - x - 1$  ..... 2 分

令  $h(x) = F'(x)$ , 有  $h'(x) = e^x - 1$ .

当  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $h'(x) < 0$ ;  $x \in (0, +\infty)$ ,  $h'(x) > 0$ ,

所以  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增,

故  $h(x) \geq h(0) = 0$ , 即  $F'(x) \geq 0$ , ..... 5 分

所以  $F(x) = f(x) - g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增. .... 6 分



(2) 设曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  与曲线  $y = g(x)$  在  $(x_2, g(x_2))$  的切线相同,

则切线方程为  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ , 即  $y - e^{x_1} - x_1 = (e^{x_1} + 1)(x - x_1)$ ,

整理得  $y = (e^{x_1} + 1)x - e^{x_1}x_1 + e^{x_1}$ .

又切线方程也可表示为  $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$ ,

即  $y - ax_2^2 - 2x_2 - 1 = (2ax_2 + 2)(x - x_2)$

整理得  $y = (2ax_2 + 2)x - ax_2^2 + 1$

所以  $\begin{cases} e^{x_1} + 1 = 2ax_2 + 2 \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -ax_2^2 + 1 \end{cases}$

消  $x_2$  整理得  $e^{2x_1} - 4ax_1e^{x_1} + (4a - 2)e^{x_1} - 4a + 1 = 0$ . ..... 9 分

令  $m(x) = e^{2x} - 4axe^x + (4a - 2)e^x - 4a + 1$ ,

$m'(x) = 2e^{2x} - 4ae^x - 4axe^x + (4a - 2)e^x = 2e^x(e^x - 2ax - 1)$

令  $\varphi(x) = e^x - 2ax - 1$ , 因为  $a < 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $\mathbf{R}$  单调递增, 又  $\varphi(0) = 0$ ,

当  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $\varphi(x) < 0$ ;  $x \in (0, +\infty)$ ,  $\varphi(x) > 0$ ,

又  $e^x > 0$  得, 所以  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $m'(x) < 0$ ;  $x \in (0, +\infty)$ ,  $m'(x) > 0$ ,

所以  $m(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 在  $(0, +\infty)$  单调递增,

所以  $m(x) \geq m(0) = 0$ ,

因此函数  $y = m(x)$  只有一个零点, 即  $e^{2x_1} - 4ax_1e^{x_1} + (4a - 2)e^{x_1} - 4a + 1 = 0$  只有

一个解  $x_1 = 0$ , 此时切线方程为  $y = 2x + 1$ , 所以曲线  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的公切线方

程为  $y = 2x + 1$ . ..... 12 分



(二) 选考题

22. 解:

(1) 将曲线  $C$  的参数方程  $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{\lambda}{t} \end{cases}$  消去  $t$ , 得  $C$  的普通方程为  $xy=\lambda$ ,

将  $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ , 代入  $xy=\lambda$

得  $\rho^2\sin\theta\cos\theta=\lambda$ , 即  $\rho^2\sin 2\theta=2\lambda$ , 即为  $C$  的极坐标方程..... 3 分

由直线  $l$  的方程  $\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=2$  化简得  $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta-\frac{1}{2}\rho\cos\theta=2$ ,

化简得  $x-\sqrt{3}y+4=0$ , 即为  $l$  的直角坐标方程. .... 5 分

(2) 将直线  $\theta=\frac{\pi}{12}$  代入  $\rho^2\sin 2\theta=2\lambda$ ,

得  $\rho^2=4\lambda$ , 即  $\rho_1=2\sqrt{\lambda}, \rho_2=-2\sqrt{\lambda}$ . .... 7 分

故以  $AB$  为直径的圆圆心为  $O$ , 半径  $r=2\sqrt{\lambda}$ .

圆心  $O$  到直线  $l$  的距离  $d=\frac{4}{\sqrt{1+3}}=2$ , 由已知得  $2\sqrt{\lambda}=2$ , 解得  $\lambda=1$ . .... 10 分

23. 解:

(1) 因为  $a>0, b>0, f(x)=|x+a|+|x-b|\geq|(x+a)-(x-b)|=a+b$ , .... 2 分

由题意, 有  $a+b=2$ ,

$$\text{于是 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{b+a+1}{ab} = \frac{3}{ab} \geq \frac{3}{(\frac{a+b}{2})^2} = 3,$$

当且仅当  $a=b=1$  时取等号,

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 3. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由柯西不等式得

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 t}{a} + \frac{\cos^4 t}{b} &= \frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{\sin^4 t}{a} + \frac{\cos^4 t}{b}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a\frac{\sin^4 t}{a}} + \sqrt{b\frac{\cos^4 t}{b}}\right)^2 = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{\sin^4 t}{a} = \frac{\cos^4 t}{b}, \text{ 即 } \frac{a}{\sin^2 t} = \frac{b}{\cos^2 t} = \frac{a+b}{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2,$$

即  $\sin^2 t = \frac{a}{2}, \cos^2 t = \frac{b}{2}$  时取等号.

$$\text{故 } \frac{\sin^4 t}{a} + \frac{\cos^4 t}{b} \geq \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯