20210904 TACA 综合测试
丘成桐数学零试试题解析

试题来自网络及考生回忆

1 组合数

$\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{8}{k}k^8$ 的值为 ____.

解：

令 $I_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^n$.

则 $I_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^n=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}k^n\cdot\frac{n}{k}=-nI_{n-1}$.

而 $I_1=-1$，故 $I_8=8!=\boxed{40320}$.

【考点】组合数的递推公式.

2 初等数论

在模 2520 的同余系里，满足方程 $a^2\equiv a\pmod{2520}$ 的元素 a 的个数为 ____.

解：2520 整除 $a(a-1)$，其中 $2520=2^3\times3^2\times5\times7$.

对 $b\in\{2^3,3^2,5,7\}$，a 模 b 的余数 r_b 均等于 0 或 1；反之，对于每组这样的余数 (r_8,r_9,r_5,r_7)，这样的 a 存在且唯一（此由中国剩余定理保证）. 故所求 a 的个数为 $\boxed{16}$.

【考点】中国剩余定理.

3 数列

设小猿数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0=-1$，$a_1=1$，$a_n=-6a_{n-1}-9a_{n-2}-8$，$n\geqslant 2$. 则 $a_9=$____.

解：

令 $b_n=a_n+\frac{1}{2}$，则 $b_n=-6b_{n-1}-9b_{n-2}$.

因此 $b_n=(\lambda n+\mu)(-3)^n$，$b_0=-\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{3}{2}$.

解得 $\lambda=0$，$\mu=-\frac{1}{2}$，即 $b_n=-\frac{1}{2}(-3)^n$，$b_9=\frac{3^9}{2}$.

故 $a_9=\frac{3^9-1}{2}=\boxed{9841}$.

【考点】特征根方程.

4 不等式

已知实数 x,y 满足 $5x^2+6xy+5y^2-8x-8y=-3$. 记 $I=\max\{x+y-x^2-y^2\}$，则 $[100I]=$____.

解：

令 $r=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}$，则 $I=\max\left\{\frac{1}{2}-r^2\right\}$.

令 $x=\frac{1}{2}+r\cos\theta$，$y=\frac{1}{2}+r\sin\theta$，代入方程可得 $r^2=\frac{1}{5+3\sin 2\theta}\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right]$.

因此 $I=\frac{3}{8}$，$[100I]=[37.5]=\boxed{37}$.

【考点】数形结合.

5 极限

已知 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(2n-k)(2n+k)}$，则 $[100I]=$____.

解:

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(2+\frac{k}{n}\right)}=\int_0^1\frac{1}{(2-x)(2+x)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\left(\ln|2+x|-\ln(2-x)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3.$$

故所求值为 $[25\ln 3]=\boxed{27}$.

【考点】定积分的定义与计算.

6 定积分

已知 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$，则 $[10I]=$____.

解:

令 $u=\tan t$. 则

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}} \mathrm{d}\arctan u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} \mathrm{d}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan \frac{u}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

故所求为 $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi\right] = \boxed{11}$.

【考点】 三角有理函数的不定积分.

7 定积分

已知 $I=\int_1^9 \sqrt{(x-1)(9-x)}\mathrm{d}x$，则 $[I]=$ ____.

解：

令 $x-1=8\sin^2 u,\ u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

则

$$
\begin{aligned}
I &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\cos u \mathrm{d}\left(8\sin^2 u\right) = 128\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\cos^2 u\mathrm{d}u \\
&= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u\mathrm{d}u \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4u)\mathrm{d}(4u) \\
&= 4s-\sin s\Big|_0^{2\pi} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

故 $[I]=\boxed{25}$.

【考点】 定积分的换元法.

8 高阶导数

已知 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x^2}$，则 $\left[-f^{(8)}(0)\right]=$____.

解：

令 $f(x)=y$.
则 $y'=2xy\cos x^2$.
故 $y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=2x(y\cos x^2)^{(n-1)}+2n(y\cos x^2)^{(n-2)}$.
令 $x=0$，得 $y^{(n)}=2n(y\cos x^2)^{(n-2)}$.
由于 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\quad(x\to 0)$，
故 $\cos x^2=1-\dfrac{x^4}{2!}+o\left(x^7\right)\quad(x\to 0)$.
换言之，$g(x)=\cos x^2$ 的 4 阶导数是 -12，其余阶导数（不大于 6 阶）等于 0.
故 $x=0$ 时，$y^{(2)}=4y\cos x^2=4$，
$y^{(4)}=8(yg)^{(2)}=8y^{(2)}g=32$，
$y^{(6)}=12(yg)^{(4)}=12y^{(4)}g+12g^{(4)}y=240$，
$y^{(8)}=16(yg)^{(6)}=16y^{(6)}g+16\times\dbinom{6}{4}y^{(2)}g^{(4)}=-7680.$
故所求值为 $\boxed{7680}$.

【考点】莱布尼兹公式、泰勒展开.

9 泰勒公式

求 $[100\arctan 0.5]$ 的值.

解： 设 $y=\arctan x$. 则

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

因此

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

故

$$100\arctan 0.5 < 100\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right) = 50 - \frac{25}{6} + \frac{5}{8} = 46\frac{11}{24},$$

$$100\arctan 0.5 > 100\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64}\right) = 50 - \frac{25}{6} + \frac{5}{8} - \frac{25}{112} > 46.$$

因此，所求值为 $\boxed{46}$.

【考点】泰勒展开.

10 行列式

已知 2021×2021 的小猿方阵如下所示：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $\left[\frac{1}{2020!}\det M\right] =$ ____。

解：

$$M=\begin{pmatrix} 2020\times 1 & 2020\times 2 & 2020\times 3 & 2020\times 4 & \cdots & 2020\times 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$=2020\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$=2020\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2021 \end{pmatrix}$$

$$=2020\times 2021!$$

故所求值为 $\boxed{4082420}$.

【考点】 初等行变换.

11 矩阵的幂次

令

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

令 $M=A-A^2+A^3-A^4+\cdots+(-1)^{n-1}A^n+\cdots$，则 $[2021\det M]=$____.

解：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-\frac{4}{3} & 0 \\ -2 & \frac{4}{3} & \lambda-\frac{2}{3} \end{vmatrix} = (\lambda-\frac{2}{3})\left(\lambda^2-\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{9}\right).$$

这表明存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & * & * \\ 0 & \frac{1}{3} & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

故令 $f(x) = x - x^2 + x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}x = \frac{x}{1+x}$ $(|x|<1)$，我们有

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} f\left(\frac{2}{3}\right) & * & * \\ 0 & f\left(\frac{1}{3}\right) & * \\ 0 & 0 & f\left(\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & * & * \\ 0 & \frac{1}{4} & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

因此 $|M| = |P^{-1}MP| = \frac{1}{40}$. 因此，所求值为 $\boxed{50}$.

【考点】矩阵的对角化.

12 线性方程组的解

如果实数 k 使得关于 x,y,z 的线性方程组 $\begin{cases} kx+y+2z=1 \\ 3x+ky+4z=1 \\ -x+2y+z=2 \end{cases}$ 无解，则称其是一个“好猿数”. 设所有好猿数之和为 I，则 $[I]=$____.

解：

由题设，知方程组 $\begin{cases}(2k+1)y+(k+2)z=2k+1\\(k+6)y+7z=7\end{cases}$ 无解.

于是，

$$(2k+1)\cdot 7-(k+2)(k+6)=0,$$

且

$$\frac{k+2}{7}\neq\frac{2k+1}{7}.$$

因此，$k^2-6k+5=0$ 且 $k\neq 1$. 因此 $k=5$，所求和等于 $\boxed{5}$.

【考点】克莱默法则.

13 线性方程组的解

设 A 为一个 2022×2020 矩阵. 如果关于 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_{2020})^{\mathrm{T}}$ 的线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间维数等于 10，则关于 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_{2022})^{\mathrm{T}}$ 的线性方程组 $A^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 的解空间维度是 ____.

解：

由于 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 解空间的维数是 10，故 $\mathrm{rank}A^{\mathrm{T}}=\mathrm{rank}A=2020-10=2010$.
因此，$A^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 解空间的维数是 $2022-2010=\boxed{12}$.

【考点】线性方程组的解空间、矩阵的秩.

14 群的同态

记 S_3 为 3 个元素的置换群，则群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 S_3 的群同态的个数为 ____.

解：

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的同态像，只能是 $\{e\}$ 或者 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 或者它本身.

S_3 没有 4 阶子群，有三个与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构的子群. 当像是 $\{e\}$ 时，这样的同态有 1 个；当像是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时，这个同态的 kernel 为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个子群，这样的 kernel 共 3 个. 像与 kernel 确定后，同态便唯一确定，故所求个数为 $1+3\times3=\boxed{10}$ 个.

【考点】群同态的像、子群.

15 有限域上的矩阵

设 A 为一个 2×2 的可逆方阵，且方阵中每个位置的元素在模 3 同余系 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 中取值. 那么满足 $A^{50}\equiv I_2 \pmod 3$ 方阵 A 的个数为 ____.

解：

域 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上的一般线性群是一个 48 元群；这是因为它的两个列向量线性无关，第一个列向量有 8 种选择，第二个列向量有 6 种选择.

A 是这个 48 元群的 50 阶元，因此 A 是一个 2 阶元.

设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则由 $A^2\equiv I_2 \pmod 3$ 知 $b(a+d)$ 与 $c(a+d)$ 均为 3 的倍数，a^2+bc 与 d^2+bc 均模 3 余 1.

因此，要么 b,c 均为 $\bar{0}$，a,d 均不为 $\bar{0}$；要么 a,d 均为 $\bar{0}$，$b=c=\bar{1}$ 或 $\overline{-1}$；要么 $a=-d=\bar{1}$ 或 $\overline{-1}$，b,c 中恰有一个 $\bar{0}$.

这样的矩阵共有 $4+2+2\times4=\boxed{14}$ 个.

【考点】一般线性群、群元素的阶.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。