2024 届新高三开学联考

数学试题

本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 的虚部小于 0，且 $z^2=-1$，则 $z(1-z)=$

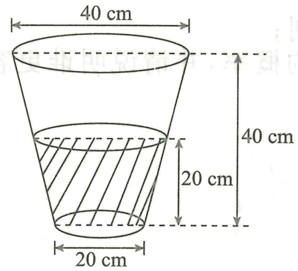
A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

2. 已知集合 $M=\{x\in \mathbf{Z}\mid y=\ln(1-x^2)\}$，$N=\{-1,0,1\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{-1,1\}$　　D. $\varnothing$

3. 最早的测雨器记载见于南宋数学家秦九韶所著的《数书九章》(1247 年). 该书第二章为“天时类”，收录了有关降水量计算的四个例子，分别是“天池测雨”、“圆罂测雨”、“峻积验雪”和“竹器验雪”. 如图“竹器验雪”法是下雪时用一个圆台形的器皿收集雪量（平地降雪厚度＝器皿中积雪体积除以器皿口面积），已知数据如图（注意：单位 cm），则平地降雪厚度的近似值为



A. $\dfrac{91}{12}$ cm　　B. $\dfrac{31}{4}$ cm

C. $\dfrac{95}{12}$ cm　　D. $\dfrac{97}{12}$ cm

4. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_6=2a_3$，则 $\dfrac{S_{17}}{a_3}=$

A. 17　　B. 34　　C. 48　　D. 51

5. 已知 $a^{\log_3 a}=3^{\log_3 81}$，则 $a=$

A. 9 或 $\dfrac{1}{3}$　　B. 81 或 $\dfrac{1}{3}$

C. 9 或 $\dfrac{1}{9}$　　D. 81 或 $\dfrac{1}{81}$

6. 已知 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\varphi\right)(\varphi\in[0,\pi))$ 在 $\left(-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\right)$ 上单调递减，且 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，则

A. $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$

7. 已知直线 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A,B 两点，过线段 AB 的中点 P 作一条垂直于 x 轴的直线 m 与直线 $l:y=-\frac{1}{4}$交于点 Q，则$\triangle QAB$ 的面积为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

8. 若 $a=0.001+\sin 0.001$，$b=\ln 1.001$，$c=e^{0.001}-1$，则

A. $b>c>a$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 铁棍的长度随温度的改变发生变化，某试验室在某个时段每隔一个小时测得同一根铁棍的长度依次为 3.62，3.61，3.65，3.62，3.63，3.63，3.62，3.64(单位：cm)，则

A. 铁棍长度的极差为 0.04 cm

B. 铁棍长度的众数为 3.62 cm

C. 铁棍长度的中位数为 3.625 cm

D. 铁棍长度的第 80 百分位数为 3.63 cm

10. 已知圆 $C:x^2+y^2-2x-6=0$，$M(x,y)$为圆 C 上任意一点，$A(1,-1)$，则

A. $|MC|=1$

B. 直线 $l:y=x+b$ 过点 A，则 C 到直线 l 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{7}-1\leqslant|MA|\leqslant\sqrt{7}+1$

D. 圆 C 与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为 $4\sqrt{42}$

11. 已知$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$，若在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$，则

A. $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$

B. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{18}$

C. 若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=\frac{1}{2}$

D. $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线长为$\frac{\sqrt{7}}{6}$

12. 若实数 x,y 满足 $x^2-y^2-xy=2$，则

A. $|x|\geqslant2$　　B. $|x|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　C. $|x+y|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　D. $x^2+y^2\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=$________.

14. 函数 $f(x)=2x+\sqrt{1-x}$ 的最大值为________.

15. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F，若 F 关于直线 $y=-x$ 的对称点 P 落在 C 上或 C 内，则椭圆 C 的离心率的取值范围为________.

16. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=3$，$AA_1=2$，P,Q 为 A_1D_1，D_1C_1 的中点，S 在 BC 上，且 $BS=1$. 过 P,Q,S 三点的平面与长方体的六个面相交得到六边形 $PQRSMN$，则点 M 到直线 QR 的距离为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边长分别为a,b,c，且$(a-c)^2=b^2-(2-\sqrt{2})ac$.

(1)求角B；

(2)若$A=\frac{\pi}{3}$，周长$l=\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$，求$b$.

18.（本小题满分 12 分）

正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_3=\frac{7}{4}$，且$a_1,\frac{5}{8},a_3$成等差数列，$a_{n+1}<a_n(\forall n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

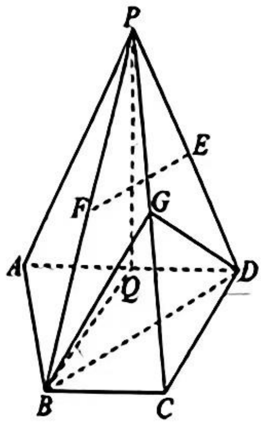
(2)若$b_n=\frac{\log_2 a_{n+1}}{a_{n+1}}$，求$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，E,F分别为PD,PB的中点，连接EF.

(1)当G为PC上不与点P、C重合的一点时，证明：$EF\parallel$平面BDG；

(2)已知G,Q分别为PC,AD的中点，$\triangle PAD$是边长为 2 的正三角形，四边形$BCDQ$是面积为 2 的矩形，当$CD\perp PQ$时，求PC与平面BGD所成角的正弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点重合,且离心率为 2.

(1)求双曲线 E 的标准方程;

(2)过点 $P(2,0)$的直线与双曲线 E 交于 A,B 两点,O 为原点,是否存在直线 l,使 $OA\perp OB$ 成立? 若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

某学校组织一项竞赛,在初赛中有两轮答题:第一轮从 A 类的三个问题中随机选两题作答,每答对一题得 20 分,答错得 0 分;第二轮从 B 类的分值分别为 20,30,40 的 3 个问题中随机选两题作答,每答对一题得满分,答错得 0 分. 若两轮总积分不低于 90 分,则晋级复赛. 甲、乙同时参赛,在 A 类的三个问题中,甲每个问题答对的概率均为 $\frac{1}{2}$,乙只能答对两个问题;在 B 类的 3 个分值分别为 20,30,40 的问题中,甲答对的概率分别为 $1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}$,乙答对的概率分别为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. 甲、乙回答任一问题正确与否互不影响. 设甲、乙在第一轮的得分分别为 X,Y.

(1)分别求 X,Y 的概率分布列;

(2)分别计算甲、乙晋级复赛的概率,并请说明谁更容易晋级复赛?

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1),g(x)=f(x)+ae^x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)求过点$(-1,-1)$且与函数 $f(x)$的图象相切的直线方程;

(2)①求证:当 $x>0$ 时,$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$;

②若函数 $g(x)$有两个不同的零点 x_1,x_2,求证:$|x_2-x_1|<2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$.

2024 届新高三开学联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. B 【解析】因为 $z^2=-1$，所以 $z=\pm i$，又复数 z 的虚部小于 0，所以 $z=-i$，所以 $z(1-z)=-i(1+i)=1-i$. 故选 B.

2. A 【解析】由 $1-x^2>0$ 得，$-1<x<1$，所以 $M=\{0\}$，$M\cap N=\{0\}$. 故选 A.

3. C 【解析】如图所示，可求得器皿中雪表面的半径为 $\frac{20+40}{4}=15$ cm，所以平地降雪厚度的近似值为 $\frac{\frac{1}{3}\pi\times20\times(10^2+15^2+10\times15)}{\pi\times20^2}=\frac{95}{12}$ cm. 故选 C.

4. D 【解析】设公差为 d，则 $a_6=a_3+(6-3)d=a_3+3d=2a_3$，$a_3=3d$，$S_{17}=\frac{(a_1+a_{17})\times17}{2}=\frac{2a_9\times17}{2}=17a_9$，$a_9=a_6+3d=3a_3$，则 $\frac{S_{17}}{a_3}=\frac{17\times3a_3}{a_3}=51$. 故选 D.

5. C 【解析】由 $a^{\log_3 a}=3^{\log_3 81}$，两边取对数得 $\log_3 a^{\log_3 a}=\log_3 81$，所以 $(\log_3 a)^2=4$，所以 $\log_3 a=2$ 或 -2，所以 $a=9$ 或 $\frac{1}{9}$. 故选 C.

6. D 【解析】因为 $f(0)=\frac{1}{2}$，$\varphi\in[0,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，可以验证：此时 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递增，舍去；当 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ 时，可以验证：此时 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递减，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

7. B 【解析】将 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 与 $y=x^2$ 联立得，$A\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$，$B\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)$，所以 AB 的长为 $\sqrt{2}\cdot|x_A-x_B|=2$，由已知得，直线 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 经过抛物线的焦点，且 $l:y=-\frac{1}{4}$ 为准线，所以 $|PQ|=\frac{|AB|}{2}=1$，所以 $\triangle QAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_A-x_B|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

8. D 【解析】令 $f(x)=x+\sin x$，$g(x)=\ln(x+1)$，$h(x)=e^x-1$，$p(x)=h(x)-f(x)=e^x-1-x-\sin x$，$q(x)=h(x)-g(x)=e^x-1-\ln(x+1)$，$p'(x)=e^x-1-\cos x$，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，令 $m(x)=p'(x)$，$m'(x)=e^x+\sin x$，当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $p'(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时单调递增，所以当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$p'(x)<p'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1-\cos\frac{1}{2}<\sqrt{e}-1-\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{e}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，所以 $p(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时单调递减，所以 $p(0.001)<p(0)=0$，所以 $c<a$；当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}\geqslant0$，所以 $q(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $q(0.001)>q(0)=0$，所以 $c>b$，综上，$a>c>b$. 故选 D.

二、选择题

9. ABC 【解析】铁棍的长度从小到大排列为 3.61，3.62，3.62，3.62，3.63，3.63，3.64，3.65(单位：cm). 对于 A：极差为 $3.65-3.61=0.04$，故 A 正确；对于

B:众数为3.62,故B正确;对于C:中位数为$\frac{3.62+3.63}{2}=3.625$,故C正确;对于D:因为$8\times 80\%=6.4$,所以铁棍的第80百分位数为从小到大排列的第7个数,是3.64,所以D不正确.故选ABC.

10. BC 【解析】$x^2+y^2-2x-6=0$变为$(x-1)^2+y^2=7$,所以C的坐标为$(1,0)$,$|MC|=\sqrt{7}$,故A错误;直线l过点A,则$-1=1+b$,$b=-2$,所以C到直线l的距离为$\frac{|1-2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故B正确;$\sqrt{7}-1=r-|CA|\leqslant|MA|\leqslant r+|CA|=\sqrt{7}+1$,故C正确;圆$C$与$x$轴相交所得的弦长为$2\sqrt{7}$,圆$C$与$y$轴相交所得的弦长为$2\sqrt{6}$,所以圆$C$与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times 2\sqrt{6}=2\sqrt{42}$,故D错误.故选BC.

11. ABD 【解析】设$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$的夹角为α,则$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|}=\frac{1}{2}$,所以$\alpha=\frac{\pi}{3}$,所以A正确;因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$,所以$\boldsymbol{a}=\frac{2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{3}$,$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2}{3}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{2{\boldsymbol{e}_1}^2-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-{\boldsymbol{e}_2}^2}{9}=\frac{2-1+\frac{1}{2}-1}{9}=\frac{1}{18}$,所以B正确;$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_1-\lambda\boldsymbol{e}_2)=\frac{1}{3}((2+\lambda)\boldsymbol{e}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{e}_2)$,因为$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}$,所以$\frac{2+\lambda}{1}=\frac{1-\lambda}{-1}$,$\lambda$不存在,所以C不正确;设$D$为$AB$的中点,则$\overrightarrow{CD}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}=\frac{\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2}{6}$,所以$|\overrightarrow{CD}|=\frac{\sqrt{{\boldsymbol{e}_1}^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4{\boldsymbol{e}_2}^2}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{6}$,所以D正确.故选ABD.

12. BD 【解析】由$x^2-y^2-xy=2$整理得,$y^2+xy+2-x^2=0$,因为$\Delta=x^2-4(2-x^2)=5x^2-8\geqslant 0$,所以$|x|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$,所以A不正确,B正确;令$x+y=t$,即$y=-x+t$,代入$x^2-y^2-xy=2$得,$x^2+tx-(t^2+2)=0$,所以$\Delta=t^2+4(t^2+2)=5t^2+8>0$,所以$t\in\mathbf{R}$,即$x+y\in\mathbf{R}$,所以C错误;令$x^2+y^2=t$,$t>0$,所以$x=\sqrt{t}\cos\theta$,$y=\sqrt{t}\sin\theta$,因为$x^2-y^2-xy=2$,所以$t\cos^2\theta-t\sin^2\theta-\sqrt{t}\cos\theta\cdot\sqrt{t}\sin\theta=2$,所以$t=\frac{2}{\cos 2\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}}=\frac{4}{2\cos 2\theta-\sin 2\theta}=\frac{4}{\sqrt{5}\cos(2\theta+\varphi)}$,所以$|t|\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$,即$x^2+y^2\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以D正确.故选BD.

三、填空题

13. $\frac{5}{6}$ 【解析】$\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.故答案为$\frac{5}{6}$.

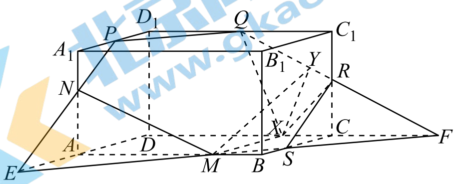
14. $\frac{17}{8}$ 【解析】令$\sqrt{1-x}=t(t\geqslant 0)$,则$x=1-t^2$,$y=-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}(t\geqslant 0)$,所以$y_{\max}=\frac{17}{8}$.故答案为$\frac{17}{8}$.

15. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 【解析】设C的半焦距为c,则$F(-c,0)$关于直线$y=-x$的对称点P的坐标为$(0,c)$,因为P落在C上或C内,所以$b\geqslant c$,所以$a^2-c^2=b^2\geqslant c^2$,所以$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.故答案为$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

16. $\frac{27\sqrt{65}}{65}$ 【解析】如图所示,在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,因为$AB=BC=3$,$BS=1$,所以$BM=1$,延长SM与DA的延长线交于E,再连接PE,PE与A_1A的交点为N,同理确定R.因为$AE\parallel BS$,所以$\frac{AM}{BM}=\frac{AE}{BS}$,因为$BS=BM=1$,$AM=2$,所以$AE=2$,因为$A_1D_1=3$,$P$为$A_1D_1$的中点,所以$A_1P=\frac{3}{2}$,因为$A_1P\parallel AE$,所以$\frac{A_1P}{AE}=\frac{A_1N}{AN}$,又$A_1A=2$,

所以 $AN=\frac{8}{7}$，同理 $CR=\frac{8}{7}$，$C_1R=\frac{6}{7}$，在 CD 上取一点 X，使得 $CX=1$，过 X 作 XY 与 QR 垂直，垂足为 Y，连接 MX，可以证明：$MY\perp QR$，且 $MX=3$. 因为 $S_{\triangle XQR}=S_{XCC_1Q}-S_{\triangle XCR}-S_{\triangle QC_1R}=\frac{9}{7}$，$QR=\sqrt{C_1Q^2+C_1R^2}=\frac{3\sqrt{65}}{14}$，所以 $\frac{1}{2}QR\cdot XY=\frac{9}{7}$，所以 $XY=\frac{12}{\sqrt{65}}$，所以 $MY=\sqrt{MX^2+XY^2}=\frac{27\sqrt{65}}{65}$.

故答案为 $\frac{27\sqrt{65}}{65}$.



四、解答题

17. **解：**(1)因为 $(a-c)^2=b^2-(2-\sqrt{2})ac$，

所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，　　　　(2 分)

由余弦定理得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　　　　(4 分)

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.　　　　(5 分)

(2) $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，　　　　(6 分)

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，　　　　(7 分)

所以 $\frac{l}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，　　　　(8 分)

所以 $b=\frac{l\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$=\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}$.　　　　(10 分)

18. **解：**(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 a_1，$\frac{5}{8}$，a_3 成等差数列，所以 $a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}$，

因为 $S_3=\frac{7}{4}$，所以 $a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{7}{4}$，　　　　(2 分)

相减得 $a_1q=\frac{1}{2}$，所以 $q=\frac{1}{2a_1}$，

代入 $a_1+a_1q^2=\frac{5}{4}$ 得 $4a_1^2-5a_1+1=0$，

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\ q=2\end{cases}$，　　　　(4 分)

因为 $a_{n+1}<a_n(\forall n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\begin{cases}a_1=1,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$.　　　　(6 分)

(2)由已知得，$b_n=-n\cdot 2^n$，　　　　(7 分)

$T_n=-[1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot 2^n]$，　　　　(8 分)

所以 $2T_n=-[1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)2^n+n\cdot 2^{n+1}]$，

两个等式相减得 $-T_n=-(2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1})$，　　　　(10 分)

所以 $T_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$.　　　　(12 分)

19. **解：**(1)因为 E，F 分别为 PD，PB 的中点，所以 $EF\parallel BD$，　　　　(1 分)

因为 $EF\not\subset$ 平面 BDG，$BD\subset$ 平面 BDG，

所以 $EF\parallel$ 平面 BDG.　　　　(3 分)

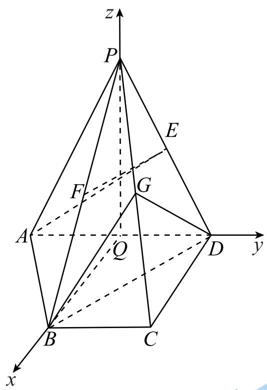
(2)因为三角形 PAD 是正三角形，Q 为 AD 的中点，

所以 $PQ\perp AD$，

又因为 $CD\perp PQ$，$AD\cap CD=D$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$，$BQ\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PQ\perp BQ$，

因为四边形 $BCDQ$ 是矩形，所以 $BQ\perp AD$，即直线 QP，AD，QB 两两垂直，　　　　(5 分)

以 Q 为坐标系的原点，射线 QB，QD，QP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



(6 分)

因为四边形 $BCDQ$ 是面积为 2 的矩形，$BC=QD=1$，所以 $BQ=2$，

由已知得，$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(2,0,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$，(8 分)

所以 $\overrightarrow{PC}=(2,1,-\sqrt{3})$，$G\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，(10 分)

设平面 BGD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BG}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{BG}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases},$$

$$\therefore\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -2x+y=0\end{cases},$$

令 $x=1$，得 $y=2$，$z=0$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,2,0)$，设 PC 与平面 BGD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以 PC 与平面 BGD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(12 分)

20. **解**：(1)设 E 的半焦距为 c，因为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为(2,0)，所以 $c=2$，(1 分)

因为 E 的离心率为 2，所以 $a=1$，$b^2=c^2-a^2=3$，

(3 分)

所以双曲线 E 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. (4 分)

(2)当直线 l 的斜率为 0 时，显然不适合题意；当直线 l 的斜率不为 0 时，

设直线 l：$x=my+2\left(m\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+2\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}$，消去 x，得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$，(6 分)

$3m^2-1\neq0$ 且 $\Delta=(12m)^2-36(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$，

$y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$，(7 分)

所以 $x_1x_2=(my_1+2)(my_2+2)=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4$

$=m^2\cdot\frac{9}{3m^2-1}-\frac{24m^2}{3m^2-1}+4=-\frac{3m^2+4}{3m^2-1}$，(9 分)

令 $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3m^2+4}{3m^2-1}+\frac{9}{3m^2-1}=0$，

解得，$m=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$，此时 $OA\perp OB$，(11 分)

所以存在直线 l：$\sqrt{3}x\pm\sqrt{5}y-2\sqrt{3}=0$，使 $OA\perp OB$ 成立. (12 分)

21. **解**：(1)由已知得，$X=0,20,40$，

$P(X=0)=C_2^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$P(X=20)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

$P(X=40)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

所以 X 的分布列为

X	0	20	40
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（3 分）

由已知得，$Y=20,40$，

所以 $P(Y=40)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$，

$P(Y=20)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

所以 Y 的分布列为

Y	20	40
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

（6 分）

(2)甲在第二轮得分分类如下：

选 20 分和 30 分的题所得分数为 20 分和 50 分，

选 20 分和 40 分的题所得分数为 20 分和 60 分，

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分、30 分、40 分和 70 分，（7 分）

乙在第二轮得分分类如下：

选 20 分和 30 分的题所得分数为 0 分、20 分、30 分和 50 分，

选 20 分和 40 分的题所得分数为 0 分、20 分、40 分和 60 分，

选 30 分和 40 分的题所得分数为 0 分、30 分、40 分和 70 分，（8 分）

由已知及(1)得，

甲两轮的总积分不低于 90 分的概率为

$P_{甲}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{5}{36}$；（9 分）

乙两轮的总积分不低于 90 分的概率为，

$P_{乙}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5}{48}$，（11 分）

因为 $P_{甲}>P_{乙}$，所以甲更容易晋级复赛.（12 分）

22. **解**：(1) $f'(x)=\frac{1}{x+1}$，

设切点的坐标为 $(x_0,f(x_0))$，

则切线方程为 $y-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}(x-x_0)$，

因为切线过点 $(-1,-1)$，

所以 $-1-\ln(x_0+1)=\frac{1}{x_0+1}(-1-x_0)$，

解得 $x_0=0$，

所以切线方程为 $y=x$.（3 分）

(2)①令 $h(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$，$h'(x)=e^x-x-1$，令 $h'(x)=m(x)$，

则 $m'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$m'(x)=e^x-1>0$，

所以 $m(x)=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h'(x)>h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=0$，

即当 $x>0$ 时，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$；（6 分）

② $g(x)=\ln(x+1)+ae^x$，$g'(x)=ae^x+\frac{1}{x+1}$，

若 $a\geqslant0$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，最多只有一个零点，不符合题意；（7 分）

若 $a<0$，$g'(x)=ae^x+\frac{1}{x+1}=\frac{a}{x+1}\left[e^x(x+1)+\frac{1}{a}\right]$，令 $n(x)=(x+1)e^x$，因为 $x+1>0$，$e^x>0$，且 $n'(x)=(x+2)e^x$，当 $x>-1$ 时，$n'(x)>0$，所以 $n(x)=(x+1)e^x$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为当 $x\to-1$ 时，$(x+1)e^x\to0$；当 $x\to+\infty$ 时，

$(x+1)e^x \to +\infty$,

又因为 $-\frac{1}{a}>0$,

所以 $-\frac{1}{a}=(x+1)e^x$ 恰有一解 $x=x_0$,

当 $x\in(-1,x_0)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,所以 x_0 为函数 $g(x)$ 的唯一的极大值点, (8 分)

因为当 $x\to-1$ 时,$g(x)=ae^x+\ln(x+1)\to-\infty$,

当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)=ae^x+\ln(x+1)\to-\infty$,

所以函数 $g(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2 等价于 $g(x_0)>0$,即 $ae^{x_0}+\ln(x_0+1)>0$, (9 分)

不妨设 $x_2>x_1$,

当 $x\in(-1,0]$,$g(x)<0$,所以 $x_2>x_1>0$,

由(1)得,直线 $y=x$ 与函数 $y=\ln(x+1)$ 切于原点得:当 $x>0$ 时,$\ln(x+1)<x$,

因为 $a<0$,所以当 $x>0$ 时,$g(x)=ae^x+\ln(x+1)$

$<a\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+x=\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a$,

令 $q(x)=\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a$,

即当 $x>0$ 时,$g(x)<q(x)$, (10 分)

所以 $\frac{ax^2}{2}+(a+1)x+a=0$ 一定存在两个不同的根,设为 x_3,x_4 $(x_3<x_4)$,

因为 $x_2>0$,

所以 $q(x_2)>g(x_2)=0=q(x_4)$,

又因为 x_2,x_4 位于单调递减区间,

所以 $x_2<x_4$,同理 $x_1>x_3$,

所以 $x_3<x_1<x_2<x_4$,所以 $x_4>x_2>0$,

因为 $x_3x_4=2>0$,所以 $x_3>0$,

又因为 $x_3+x_4=-\frac{2(a+1)}{a}$,

所以 $x_4-x_3=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}$

$=\sqrt{\frac{4(a+1)^2}{a^2}-8}$

$=2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$,

所以 $|x_2-x_1|<2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$. (12 分)