2024 北京平谷高二（上）期末

数　　学

注意事项：

1.本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 4 页.共 150 分，考试时间为 120 分钟.

2.试题所有答案必须书写在答题纸上，在试卷上作答无效.

3.考试结束后，将答题纸交回，试卷按学校要求保存好.

第 I 卷　选择题（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上.）

1. 直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的倾斜角为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 圆心为 $(-1,3)$，且与直线 $x-y+2=0$ 相切的圆的半径为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 8　　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知双曲线 C 的焦点分别为 F_1、F_2，$|F_1F_2|=6$，双曲线 C 上一点 P 满足 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=4$，则双曲线 C 的离心率为（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 $A(2,y_0)$ 到焦点的距离是 4，则其准线方程为（　）

A. $x=-2$　　B. $x=-1$　　C. $x=-4$　　D. $x=-8$

5. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{c}$，$O$ 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{OP}=$（　）

A. $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

6. 已知展台上四个盲盒中装有由卡通动漫人物设计的四款不同的产品，学生甲喜欢其中的一款.甲从四个盲盒中抽选两个，则“学生甲抽到了喜欢的那一款”的概率为（　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{7}{10}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. 已知半径为 1 的圆经过点 $A(2,3)$，过点 $M(-2,0)$ 向圆作切线，则切线长的最大值为（　）

A. $\sqrt{35}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $\sqrt{15}$　　D. $4\sqrt{3}$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，则“它的渐近线方程为 $y=\pm 2x$”是“它的离心率为 $\sqrt{5}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=PB=4\sqrt{3}$，底面 $ABCD$ 是边长为12的正方形，S 是四边形 $ABCD$ 及其内部的动点，且满足 $PS\le 6$，则动点S 构成的区域面积为（　）

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. 12π　　C. 24π　　D. $24\sqrt{6}$

10. 已知曲线方程为 $|x-1|+|x+1|+2|y|=6$，给出下列命题：

①曲线关于原点对称；

②曲线上任意两点的距离最大值为 $2\sqrt{5}$；

③曲线上的点的横坐标取值范围 $[-3,3]$；

④曲线上的点构成的图形面积为 16.

则所有真命题是（　）

A. ①②　　B. ①②③　　C. ①③④　　D. ②③④

第 II 卷　　非选择题（共 110 分）

二、填空题（本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分，请把答案填在答题卡中相应题中横线上）

11. 已知直线 $l_1: ax+y+2=0$ 和直线 $l_2: 2x+(a+1)y-3=0$ 平行，那么 $a=$______.

12. 已知圆 $C: x^2+y^2-2x+4y+2=0$ 内有一点 $P(2,-1)$，经过点 P 的直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，当弦 AB 恰被点 P 平分时，直线 l 的方程为______.

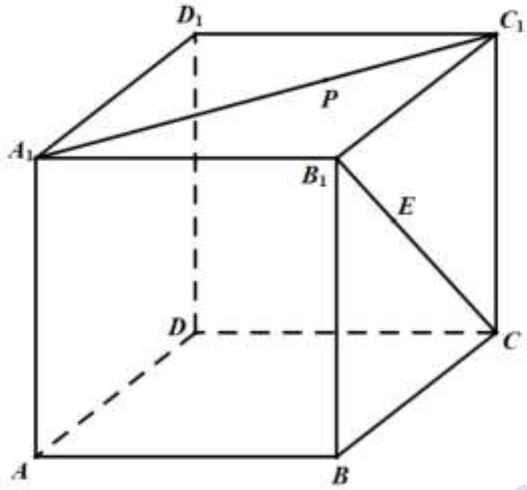
13. 已知抛物线顶点在原点，以坐标轴为对称轴，从以下两个条件中任选一个条件，并根据所选条件写出一个抛物线的标准方程.①焦点 $F(2,0)$；②经过点 $A(2,1)$.你所选的条件是______，得到的一个抛物线标准方程是______.

14. 已知盒子中有大小、形状都相同的 4 个红球和 2 个白球，每次从中取一个球，取到红球记 1 分，取到白球记 2 分.如果有放回的抽取 2 次，则“2 次所得分数之和为 3 分”的概率是______.

15. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{-m}=1$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则 $m=$______.

16. 已知曲线 $x^2+y^2-ax-3=0$ 关于直线 $x+y-1=0$ 对称，若直线 $y=k(x+1)$ 被曲线截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则 $k=$______.

17. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，P 分别是线段 B_1C 和 A_1C_1 上的动点.对于下列四个结论：



①存在无数条直线 $EP \parallel$ 平面 AA_1B_1B；

②线段 EP 长度的取值范围是 $\left[2,2\sqrt{3}\right]$；

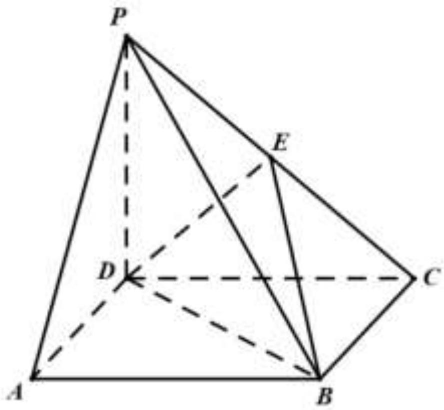
③三棱锥 $P-ACE$ 的体积最大值为 $\dfrac{4}{3}$；

④设 E，P 分别为线段 B_1C 和 A_1C_1 上的中点，则线段 EP 的垂直平分线与底面的交点构成的集合是圆.

则其中正确的命题有______.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

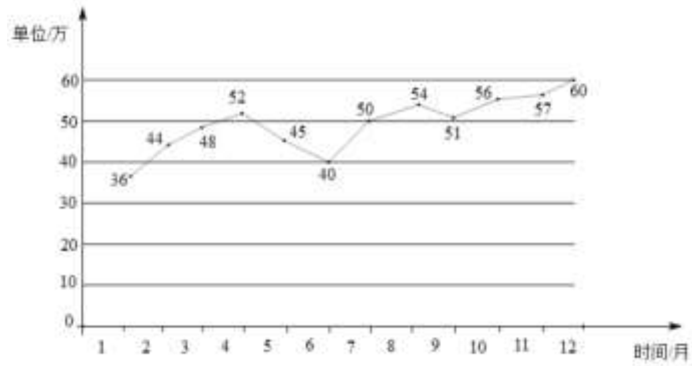
18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AD\perp PC$，$PD=DC=2$，$AD=1$，E 是 PC 的中点.



（1）证明：$PA//$ 平面 DBE；

（2）求点 P 到平面 DBE 的距离.

19. 已知某公司统计了一种产品在 2023 年各月的销售情况，如图，公司将每连续 3 个月的销售量做为一个观测组，对该公司这种产品的销售量（单位：万）进行监测和预测.



（1）现从产品的 10 个观测组中任取一组，求组内三个月中至少有一个销售量高于 50 万的概率；

（2）若当月的销售量大于上一个月的销售量，则称该月的销售指数增长；若当月的销售量小于上一个月的销售量，则称该月的销售指数下降.（已知 1 月份的销售量低于 2022 年 12 月份销售量）.现从 10 个观测组中任取一组，求抽到的观测组中销售指数增长月份恰有 2 个的概率.

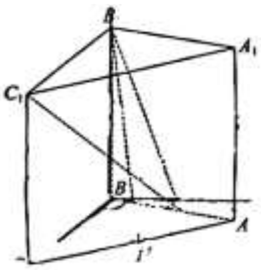
（3）假设该产品每月的销售指数是否增长只受上一个月销售指数的影响，预测 2024 年 1 月份“销售指数增长”和“销售指数下降”的概率估计值哪个最大（直接写出结果）.

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点距离为 $2\sqrt{6}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设过点 $(0,1)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，求弦 AB 垂直平分线的纵截距的取值范围.

21. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为矩形，侧面 $BB_1C_1C\perp$ 底面 ABC，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$BC=4$，$BB_1=3$，点 N 在 AC 上，$B_1N\perp AC$.



（1）求证：N 为 AC 中点；

（2）设 AB 上一点 M，若平面 C_1B_1M 与平面 BB_1N 的夹角的余弦值为 $\dfrac{3}{4}$，求 $\dfrac{BM}{BA}$ 的值.

22. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(a^2>3)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，设椭圆 C 上一点 P（不与左右顶点重合），直线 PF_2 与椭圆的另一个交点为 Q，且 $\triangle QF_1F_2$ 的周长为 6.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）已知点 A 为椭圆的左顶点，直线 AP，AQ 分别与直线 $x=4$ 交于 M，N 两点.试判断：以 MN 为直径的圆与直线 PF_2 的位置关系，并说明理由.

参考答案

第 I 卷　　选择题（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上.）

1. 【答案】C

【分析】先求直线的斜率，根据公式求倾斜角.

【详解】直线方程可化为 $y=\sqrt{3}x+1$，所以直线的斜率为：$k=\sqrt{3}$，即 $tan\theta=\sqrt{3}$，

又 $\theta\in[0,\pi)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

故选：C

2. 【答案】A

【分析】根据题意，结合点到直线的距离公式，即可求解.

【详解】由题意知，圆心为 $(-1,3)$，且与直线 $x-y+2=0$ 相切，

则圆的半径为 $r=d=\frac{|-1-3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$.

故选：A.

3. 【答案】B

【分析】由双曲线的定义求出 $a=2$，由 $|F_1F_2|=6$ 可得 $c=3$，然后由离心率的计算公式计算即可.

【详解】因为双曲线 C 的焦点分别为 F_1、F_2，$|F_1F_2|=6$，

所以 $2c=6$，故 $c=3$，

又因为双曲线 C 上一点 P 满足 $||PF_1|-|PF_2||=4$，所以 $2a=4$，故 $a=2$，

所以双曲线 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

故选：B.

4. 【答案】A

【分析】根据抛物线的定义可直接写出答案.

【详解】因为抛物线的准线为：$x=-\frac{p}{2}$，根据抛物线的定义，可得 A 到准线的距离为 4，即 $2+\frac{p}{2}=4$

$\Rightarrow\frac{p}{2}=2$.

所以准线方程为 $x=-2$.

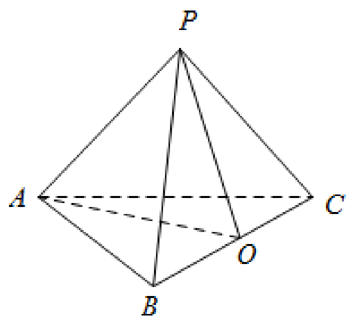
故选：A

5. 【答案】C

【分析】根据空间向量的线性运算法则求解.

【详解】由题意 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$，

故选：C.



6.【答案】D

【分析】根据题意，根据组合数的计算，求得基本事件的总数，以及所求事件所包含的基本事件的个数，结合古典概型的概率计算公式，即可求解.

【详解】根据题意，甲四个盲盒中抽选两个，共有 $\mathrm{C}_4^2=6$ 种不同的选法，

其中学生甲抽到了喜欢的那一款，有 $\mathrm{C}_3^1=3$ 种不同的选法，

根据古典概型的概率计算公式，可得概率为 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

故选：D.

7.【答案】A

【分析】根据题意，求得圆心的轨迹方程为圆 A，得到圆 A 上到点 M 的最大距离为 $d=6$，结合圆的切线长公式，即可求解.

【详解】设圆的圆心坐标为 (a,b)，

因为圆的半径为1，且过点 $A(2,3)$，可得 $\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}=1$，

即 $(a-2)^2+(b-3)^2=1$，即圆心的轨迹表示以 $A(2,3)$ 为圆心，半径为 1 的圆 A，

可得 $|MA|=\sqrt{(2+2)^2+(3-0)^2}=5$，则圆 A 上的点到点 M 的最大距离为 $d=|MA|+1=6$，

又由切线长公式，可得切线长的最大值为 $l=\sqrt{d^2-1^2}=\sqrt{35}$.

故选：A.

8.【答案】D

【分析】依题意可分别讨论参数 m,n 的符号，再分别验证渐近线和离心率即可得出结论.

【详解】根据意题意，若 $m<0,n>0$，则渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\frac{-n}{m}}x$，即可得 $n=-4m$，

此时离心率为 $e=\sqrt{\frac{n-m}{n}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即充分性不成立；

若 $m<0,n>0$，当离心率为 $\sqrt{5}$ 时可得 $e=\sqrt{\dfrac{n-m}{n}}=\sqrt{5}$，即可得 $m=-4n$，

此时渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\dfrac{n}{-m}}x=\pm\dfrac{1}{2}x$，显然必要性也不成立；

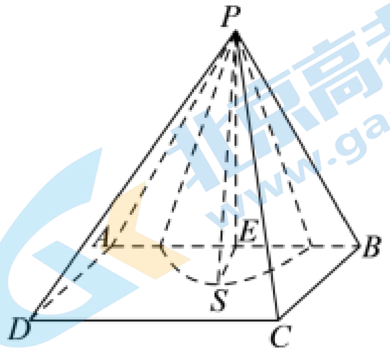
即可得“它的渐近线方程为 $y=\pm 2x$ ”是“它的离心率为 $\sqrt{5}$ ”的既不充分也不必要条件；

故选：D

9.【答案】B

【分析】取线段 AB 的中点 E，连接 PE、SE，推导出 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，可知点 S 的轨迹是以点 E 为圆心，半径为 $2\sqrt{6}$ 的圆及其内部，结合圆的面积公式可求得结果.

【详解】取线段 AB 的中点 E，连接 PE、SE，



因为 $PA=PB=4\sqrt{3}$，E 为 AB 的中点，则 $PE\perp AB$，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PE\subset$ 平面 PAB，

所以，$PE\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $SE\subset$ 平面 $ABCD$，则 $PE\perp SE$，

因为四边形 $ABCD$ 是边长为 12 的正方形，则 $AE=6$，

所以，$PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=\sqrt{48-6^2}=2\sqrt{3}$，$SE=\sqrt{PS^2-PE^2}\le\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{6}$，

所以，点 S 的轨迹是以点 E 为圆心，半径为 $2\sqrt{6}$ 的圆及其内部，

因此，动点 S 构成的区域面积为 $\dfrac{1}{2}\pi\times\left(2\sqrt{6}\right)^2=12\pi$.

故选：B.

10.【答案】C

【分析】根据题意，分类讨论，得到曲线的方程，画出曲线的图形，结合选项，逐项判定，即可求解.

【详解】由曲线方程为 $|x-1|+|x+1|+2|y|=6$，

当 $x>1,y>0$ 时，可得 $x-1+x+1+2y=6$，即 $x+y=3$；

当 $x>1,y<0$ 时，可得 $x-1+x+1-2y=6$，即 $x-y=3$；

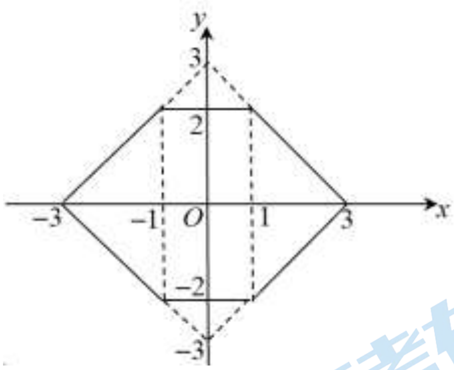
当 $-1\le x\le 1,y>0$ 时，可得 $1-x+x+1+2y=6$，即 $y=2$；

当 $-1\le x\le 1, y<0$ 时，可得 $1-x+x+1-2y=6$，即 $y=-2$；

当 $x<-1, y>0$ 时，可得 $1-x-x-1+2y=6$，即 $-x+y=3$；

当 $x<-1, y<0$ 时，可得 $1-x-x-1-2y=6$，即 $-x-y=3$，

所以曲线的图象，如图所示，



对于①中，用 $-x,-y$ 代入方程中的 x,y，方程不变，所以曲线关于原点对称，所以正确；

对于②中，令 $y=0$，解得 $x=\pm 3$，可得曲线上任意两点的距离最大值为 6，所以不正确；

对于③中，结合图象，可得曲线上的点的横坐标取值范围 $[-3,3]$，所以正确；

对于④中，曲线上的点构成的图形的面积为 $S=(3\sqrt{2})^2-2\times\frac{1}{2}\times 2\times 1=16$，所以正确.

故选：C.

【点睛】关键点睛：本题的关键是合理地分类讨论再正确地作出图形， 根据图形分析其对称性、距离最值和面积.

第 II 卷　非选择题（共 110 分）

二、填空题（本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分，请把答案填在答题卡中相应题中横线上）

11. 【答案】1 或 -2

【分析】利用两直线平行的斜率关系即可求得 $a=1$ 或 $a=-2$.

【详解】易知直线 $l_1: ax+y+2=0$ 的斜率一定存在，且为 $-a$，

由两直线平行可得 $-a=-\frac{2}{a+1}$，解得 $a=1$ 或 $a=-2$；

经检验 $a=1$ 或 $a=-2$ 都符合题意；

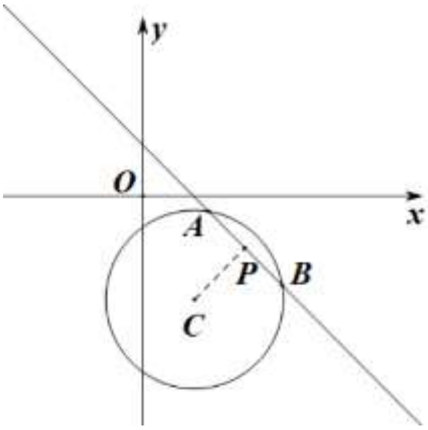
故答案为：1 或 -2

12. 【答案】$x-y-3=0$

【分析】求得圆心坐标为 $C(1,-2)$，易知 $CP\perp AB$，利用斜率之间的关系可得 $k_{AB}=-1$，即可求得直线 l 的方程.

【详解】易知 $C: x^2+y^2-2x+4y+2=0$ 可表示为 $(x-1)^2+(y+2)^2=3$，

可知圆C的圆心坐标为$C\left(1,-2\right)$，半径为$\sqrt{3}$，如下图所示：



根据题意由圆的性质可知$CP\perp AB$，易知$k_{CP}=\dfrac{-1+2}{2-1}=1$，所以$k_{AB}=-1$；

由直线的点斜式方程可得直线l的方程为$y-\left(-1\right)=x-2$，即$x-y-3=0$.

故答案为：$x-y-3=0$

13.【答案】 ①. ① ②. $y^2=8x$

【分析】利用抛物线焦点坐标以及标准方程形式即可得出答案.

【详解】若选择①，由焦点坐标可设$y^2=2px$，又可知$\dfrac{p}{2}=2$，可得抛物线标准方程是$y^2=8x$；

若选择②，根据题意可知，抛物线只能开口向右或向上，

若开口向右，可设$y^2=2px$，将$A(2,1)$代入可得抛物线标准方程为$y^2=\dfrac{1}{2}x$；

若开口向上，可设$x^2=2py$，将$A(2,1)$代入可得抛物线标准方程为$x^2=4y$；

故答案为：①；$y^2=8x$（②；$y^2=\dfrac{1}{2}x$或$x^2=4y$）

14.【答案】$\dfrac{4}{9}$

【分析】根据相互独立事件概率乘法公式计算即可.

【详解】由题意，2 次所得分数之和为 3 分，

则第 1 次取出红球第 2 次取出白球或第 1 次取出白球第 2 次取出红球，

由于有放回抽取，两次抽取为相互独立事件，

其概率为$P=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{6}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{9}$.

故答案为：$\dfrac{4}{9}$

15.【答案】1

【分析】由双曲线的标准方程确定a,b，求得c，再利用离心率求得m.

【详解】由题意显然有 $m>0$，$a^2=2,b^2=m$，因此 $c^2=2+m$，$e=\frac{\sqrt{2+m}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，解得 $m=1$，

故答案为：1.

16.【答案】$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】曲线方程化为椎圆的标准方程后得出圆心坐标，代入对称直线方程得 a 值，由弦长得出圆心到直线的距离，利用点到直线距离公式可求得 k .

【详解】曲线 $x^2+y^2-ax-3=0$ 的标准方程是 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=3+\frac{a^2}{4}$，它表示圆，圆心坐标为 $(\frac{a}{2},0)$，

由题意 $\frac{a}{2}+0-1=0$，解得 $a=2$，即圆心为 $(1,0)$，半径为 $\sqrt{3+\frac{a^2}{4}}=2$，

直线 $y=k(x+1)$ 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则圆心到直线的距离为 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

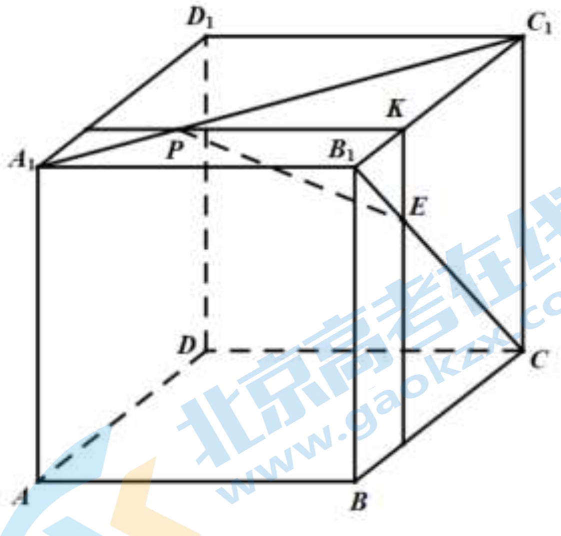
所以 $\frac{|k-0+k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.【答案】①③

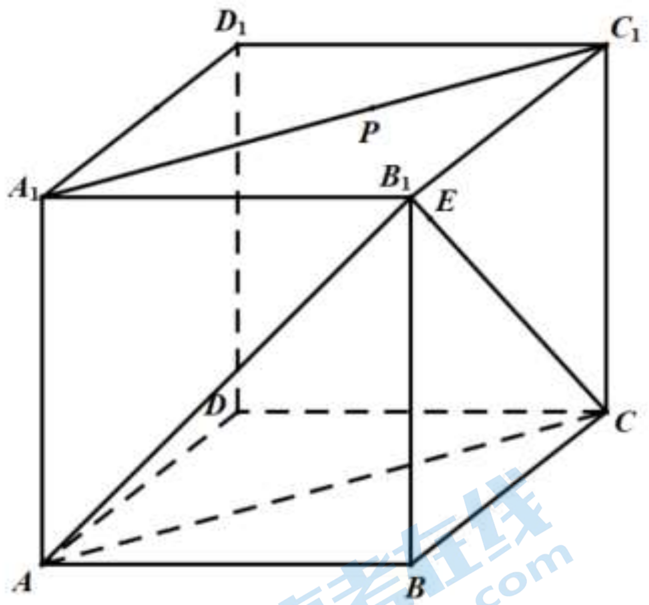
【分析】构造面面平行，寻找线面平行，可以判断①的对错；通过特殊位置，可以判断②是错误的；分析三棱锥的高是确定的，求底面积最大值，可得三棱锥体积的最大值，判断③的对错；根据公理，两个平面的交点在一条直线上，可得④是错误的.

【详解】对①：过 P 作 $PK \parallel A_1B_1$，$KE \parallel BB_1$ 交 B_1C 于 E，连接 EP，则 $EP \parallel$ 平面 AA_1B_1B，因为 P 点再 A_1C_1 上运动，故满足条件的直线 EP 有无数条.所以①正确；



对②：当 E 与 B_1 重合，P 为 A_1C_1 中点时，$EP=\sqrt{2}$，所以 EP 长度取值范围是 $\left[2,2\sqrt{3}\right]$ 是错误的；

对③：



因为直线 $A_1C_1//$ 平面 AB_1C，所以 P 到平面 AB_1C 的距离为定值，是正方体体对角线的 $\frac{1}{3}$，所以当 E 与 B_1 重合时，底面积最大，此时 $P-ACE$ 的体积最大，为 $V_{P-ACE}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{2}\right)^2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$，所以③正确；

对④，当 E，P 位置确定时，线段 EP 的垂直平分线构成一个平面，它和底面的交点应该是一条直线，所以④错误.

故答案为：①③

三、解答题（本大题共 5 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

18.【答案】（1）答案见详解

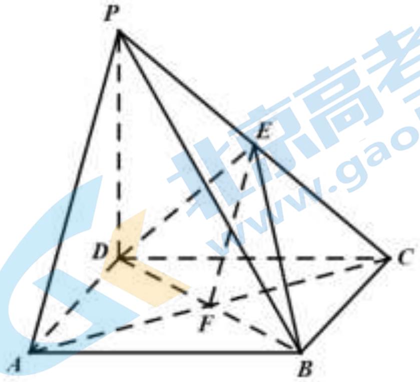
（2）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【分析】（1）构造线线平行，证明线面平行；

（2）借助等体积法求点到面的距离.

【小问 1 详解】

如图：连接 AC，交 BD 于 F，连接 EF，



因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 F 为 AC 中点，所以 $EF//PA$，

又 $EF\subset$ 平面 DBE， $PA\not\subset$ 平面 DBE，

所以 $PA//$ 平面 DBE

【小问 2 详解】

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD$，

又 $AD\perp PC$， PD， $PC\subset$ 平面 PCD， $PC\cap PD=D$，所以 $AD\perp$ 平面 PCD，

$CD\subset$ 平面 PCD，所以 $AD\perp CD$.

所以底面 $ABCD$ 为矩形.

因为 E 为 PC 中点，所以 P 、 C 到平面 DBE 的距离相等，设为 h.

由 $V_{E-BCD}=V_{C-BED}\Rightarrow\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times\frac{1}{2}PD=\frac{1}{3}\times S_{\triangle DBE}\times h$，

而 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$， $PD=2$，

$\triangle DBE$ 中， $BD=\sqrt{5}$， $DE=\sqrt{2}$， $BE=\sqrt{3}$，所以 $\triangle DBE$ 是直角三角形，且 $S_{\triangle DBE}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $h=\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即为所求.

19. 【答案】（1） $\frac{3}{4}$

（2） $\frac{3}{5}$

（3）“销售指数增长”的概率估计值最大

【分析】（1）列举出 10 个观测组中的数据，求出符合题意的观测组数据个数即可得出概率；

（2）将销售指数增长记为“1”，销售指数下降记为“0”，得出每个月的增长指数情况，求出销售指数增长月份恰有 2 个的数据组数，即可得出结论；

（3）易知 12 月份为“销售指数增长”月，求出连续两个月为增长的概率即可得出结论.

【小问 1 详解】

根据题意可知，四个观测组中的数据分别为：

$(36,44,48),(44,48,52),(48,52,45),(52,45,40),(45,40,50),(40,50,54)$，

$(50,54,51),(54,51,56),(51,56,57),(56,57,60)$；

至少有一个高于 50 万的数据有 8 组，

所以从 10 个观测组中任取一组，组内三个月中至少有一个销售量高于 50 万的概率 $P=\frac{C_8^1}{C_{10}^1}=\frac{4}{5}$；

【小问 2 详解】

将销售指数增长记为“1”，销售指数下降记为“0”，

则 10 个观测组中的销售指数可表示为：

$(0,1,1),(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1),(0,1,1)$，$(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$；

观测组中销售指数增长月份恰有 2 个的共有 6 组，

即从 10 个观测组中任取一组，抽到的观测组中销售指数增长月份恰有 2 个的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$；

【小问 3 详解】

易知 12 月份为“销售指数增长”月，12 个月当中每个月的销售指数可表示为 0，1，1，1，0，0，1，1，0，1，1，1，

易得“销售指数增长”的月份共有 8 个，

上个月增长下个月也增长的月份共 5 个，即可知 2024 年 1 月份“销售指数增长”和“销售指数下降”的概率估计值分别为 $\frac{5}{8}$ 和 $\frac{3}{8}$，

因此 2024 年 1 月份“销售指数增长”的概率估计值最大.

20. 【答案】（1） $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

（2） $(-1,0)$

【分析】（1）根据长轴长与椭圆的离心率求得 a,b,c，进而得到椭圆标准方程；

（2）设 $l:y-1=kx$ 与椭圆方程联立后，得到韦达定理的形式，利用中点坐标公式表示出 Q 点坐标，从而得到 l' 方程；令 $x=0$ 可求得 l' 在 y 轴的截距，利用函数值域的求解方法可求得结果.

【小问 1 详解】

由题意，$2a=2\sqrt{6}$，即 $a=\sqrt{6}$，

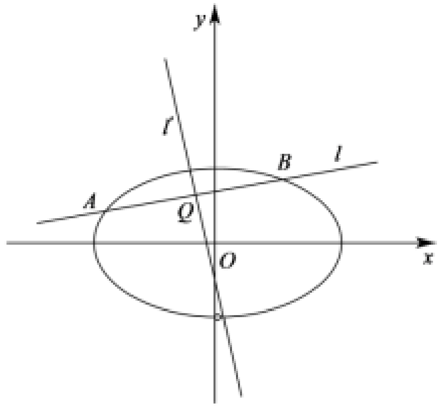
又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，

故 $b^2=a^2-c^2=6-3=3$，

故所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

如图，



由题意知：直线l的斜率k存在且不为零，

设$l: y-1=kx$，$k\neq 0$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB中点$Q(x_0,y_0)$，

联立$\begin{cases} y-1=kx \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去$y$并整理得：$(1+2k^2)x^2+4kx-4=0$，

$\Delta>0$恒成立，

则$x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2k}{2k^2+1}$，$y_0=kx_0+1=1-\dfrac{2k^2}{1+2k^2}=\dfrac{1}{1+2k^2}$，

$\therefore Q\left(-\dfrac{2k}{1+2k^2},\dfrac{1}{1+2k^2}\right)$，

则l'方程为：$y-y_0=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)$，即$y-\dfrac{1}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{2k}{1+2k^2}\right)$，

化简得：$y=-\dfrac{1}{k}x-\dfrac{1}{2k^2+1}$

设直线l'在y轴上截距为m，令$x=0$得$m=-\dfrac{1}{2k^2+1}$，

由$0<\dfrac{1}{2k^2+1}<1$可知$-1<m<0$，

所以直线l'在y轴上的截距的取值范围为$(-1,0)$.

21.【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{BM}{BA}=\dfrac{1}{2}$.

【分析】（1）利用面面垂直的性质定理得$BB_1\perp$平面ABC，然后证明线面垂直$AC\perp$平面BB_1N，得出线线垂直$AC\perp BN$，最后由等边三角形得证中点；

（2）建立如图所示的空间直角坐标系，设$\dfrac{BM}{BA}=k$ $(0\leq k\leq 1)$，利用空间向量法求二面角的方法可求得k值.

【小问 1 详解】

因为四边形 BB_1C_1C 是矩形，则 $BB_1 \perp BC$，

又因为平面 $BB_1C_1C \perp$ 底面 ABC，面 $BB_1C_1C \cap$ 底面 $ABC = BC$，$BB_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $BB_1 \perp$ 平面 ABC，$AC \subset$ 平面 ABC，则 $BB_1 \perp AC$，

因为 $B_1N \perp AC$，$B_1N \cap BB_1 = B_1$，$B_1N, BB_1 \subset$ 平面 BB_1N，

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1N，又 $BN \subset$ 平面 BB_1N，所以 $AC \perp BN$，

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 N 是 AC 中点；

【小问 2 详解】

分别以 NA, NB 所在直线为 x, y 轴，过 N 且平行于 BB_1 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，如图，

则 $BN = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$，$B(0, 2\sqrt{3}, 0)$，$C(-2, 0, 0)$，$B_1(0, 2\sqrt{3}, 3)$，$C_1(-2, 0, 3)$，$A(2, 0, 0)$，

所以 $\overrightarrow{B_1B} = (0, 0, -3)$，$\overrightarrow{B_1C_1} = (-2, -2\sqrt{3}, 0)$，

设 $\dfrac{BM}{BA} = k\ (0 \le k \le 1)$，则 $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA} = k(2, -2\sqrt{3}, 0) = (2k, -2\sqrt{3}k, 0)$，

$\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = (2k, -2\sqrt{3}k, -3)$，

设平面 B_1C_1M 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$，

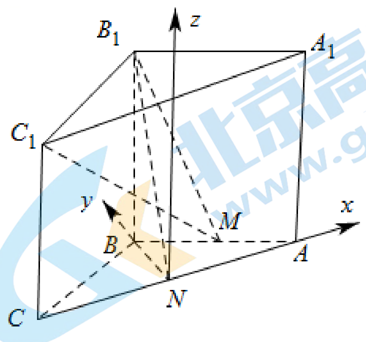
则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1M} = 2kx - 2\sqrt{3}ky - 3z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = -2x - 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$，取 $x = \sqrt{3}$，则 $\vec{m} = (\sqrt{3}, -1, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}k)$，

显然平面 BB_1N 的一个法向量是 $\vec{n} = (1, 0, 0)$，

因为平面 C_1B_1M 与平面 BB_1N 的夹角的余弦值为 $\dfrac{3}{4}$，

所以 $\dfrac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \dfrac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + 1 + \frac{16}{3}k^2}} = \dfrac{3}{4}$，又 $0 \le k \le 1$，故解得 $k = \dfrac{1}{2}$，

所以 $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{1}{2}$.



22.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) 相切，理由见解析

【分析】(1) 根据椭圆定义并利用 $a^2-c^2=3$ 即可求得标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$，与椭圆方程联立并利用韦达定理可求得 MN 的中点为 $T(4,-3m)$，且 $|MN|=6\sqrt{m^2+1}$，再由点到直线距离即可得出结论.

【小问 1 详解】

由椭圆定义可得 $\triangle QF_1F_2$ 的周长为 $|QF_1|+|QF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6$；

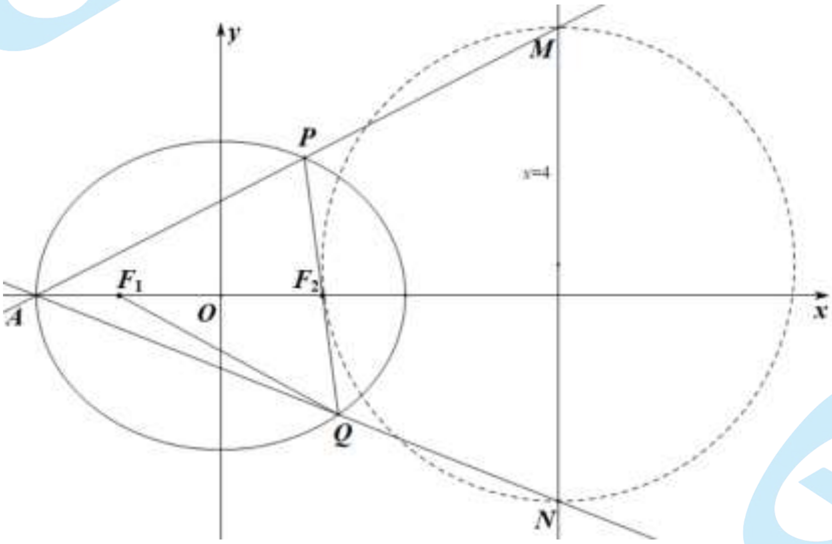
又 $b^2=a^2-c^2=3$，解得 $a=2,c=1$；

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

相切，理由如下：

如下图所示：



易知 $A(-2,0),F_2(1,0)$，设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理可得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，显然 $\Delta>0$；

且 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，

可得直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$；

所以 $M\left(4,\dfrac{6y_1}{x_1+2}\right),N\left(4,\dfrac{6y_2}{x_2+2}\right)$，设 MN 的中点为 $T(4,t)$

可得 $t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6y_1}{x_1+2}+\dfrac{6y_2}{x_2+2}\right)=\dfrac{6my_1y_2+9(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$

$=\dfrac{6m\times\left(-\dfrac{9}{3m^2+4}\right)+9\times\left(-\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)}{m^2\times\left(-\dfrac{9}{3m^2+4}\right)+3m\times\left(-\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)+9}=-3m$，

即圆心 $T(4,-3m)$；

则 $|MN|=\left|\dfrac{6y_1}{x_1+2}-\dfrac{6y_2}{x_2+2}\right|=18\times\dfrac{|y_1-y_2|}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$，

易知 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)^2+4\times\dfrac{9}{3m^2+4}}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，

化简可得 $|MN|=18\times\dfrac{|y_1-y_2|}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}=18\times\dfrac{\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}}{\dfrac{36}{3m^2+4}}=6\sqrt{m^2+1}$；

所以以 MN 为直径的圆的半径为 $\dfrac{1}{2}|MN|=3\sqrt{m^2+1}$，

又 $T(4,-3m)$ 到直线 $x=my+1$ 的距离为 $d=\dfrac{|3m^2+3|}{\sqrt{1+m^2}}=3\sqrt{1+m^2}=R$，

所以圆心到直线的距离等于圆的半径，即以 MN 为直径的圆与直线 PF_2 相切.

【点睛】方法点睛：求解圆锥曲线中弦长问题时，经常利用韦达定理代入表达式计算得出，并根据代数计算判断出几何关系.

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！