2019 北京通州区高三（上）期末

数　　学（文）

考生须知	1. 本试卷共 4 页，满分 150 分．考试时长 120 分钟． 2. 本试卷分为第一部分和第二部分两部分． 3. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效． 4. 考试结束后，请将答题卡交回．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|(x+1)(x-2)\leq 0\}$，则 $A\cap B$ 等于

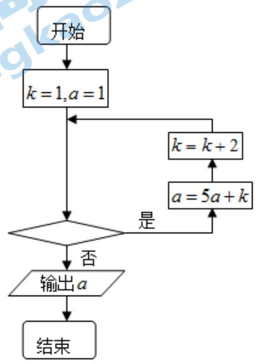
A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(a,2)$，$\boldsymbol{n}=(1,1+a)$，若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，则实数 a 的值为

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. -2　　C. 2 或 -1　　D. -2 或 1

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=3^x-1$，则 $f(-2)$ 等于

A. -8　　B. 8　　C. $-\dfrac{10}{9}$　　D. $\dfrac{8}{9}$.

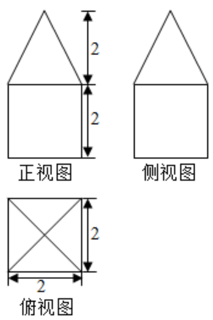


4. 执行右面的程序框图，如果输出 a 的值大于 100，那么判断框内的条件为

A. $k<5$?　　B. $k\geq 5$?　　C. $k<6$?　　D. $k\geq 6$?

5. 已知 $a=2^{1.2}$，$b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.8}$，$c=2\log_5 2$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$



6. “$k=0$”是“直线 $y=kx-1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

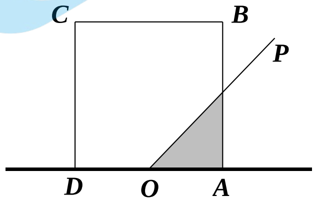
C. 充分必要条件　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是

A. 24　　　　B. 28

C. $20+4\sqrt{5}$　　　　D. $20+4\sqrt{6}$

8. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，O 为 AD 的中点，射线 OP 从 OA 出发，绕着点 O 按逆时针方向旋转至 OD. 在旋转的过程中，记 $\angle AOP$ 为 x，OP 所经过的正方形 $ABCD$ 内部的区域（阴影部分）的面积为 $f\left(x\right)$. 对于函数 $f\left(x\right)$ 给出以下 4 个结论：



① $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$；

②函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 为减函数；

③ $f\left(x\right)+f\left(\pi-x\right)=4$；

④ $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称.

其中正确结论的个数为

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 复数 i(1+i)的虚部为______.

10. 若点 $P\left(2,0\right)$ 到双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$ 的一条渐近线的距离为 1，则 $a=$______ .

11. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x\geq 1, \\ x-2y+3\geq 0, \\ y\geq x, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最小值等于______ .

12. 若锐角△ABC 的面积为 $10\sqrt{3}$，且 AB=5，AC=8，则 BC 等于______.

13. 对于直角三角形的研究，中国早在商朝时期商高就提出了“勾三股四玄五”勾股定理的特例，而西方直到公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯才提出并证明了勾股定理. 如果一个直角三角形的斜边长等于 5，那么这个直角三角形面积的最大值等于______.

14．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{-x},x\le 2,\\ \log_2 x,x>2.\end{cases}$ 若函数 $y=f\left(x\right)-k$ 有且只有一个零点，则实数 k 的取值范围是____________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin^2 x+1$

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值．

16．（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项依次成公比为 q 的等比数列，从第 3 项开始依次成等差数列，且 $a_1=8$，$a_4=-1$．

（Ⅰ）求 q 及 a_5 的值；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

17．（本小题 13 分）

北京地铁八通线西起四惠站，东至土桥站，全长 18.964km，共设 13 座车站．目前八通线执行 2014 年 12 月 28 日制订的计价标准，各站间计程票价（单位:元）如下：

四惠		3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5
四惠东			3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5
高碑店				3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
传媒大学					3	3	3	4	4	4	4	5	5
双桥						3	3	3	4	4	4	4	4
管庄							3	3	3	3	4	4	4
八里桥										3	3	4	4
通州北苑										3	3	3	3

果园										3	3	3	3
九棵树											3	3	3
梨园												3	3
临河里													3
土桥													
	四惠	四惠东	高碑店	传媒大学	双桥	管庄	八里桥	通州北苑	果园	九棵树	梨园	临河里	土桥

（Ⅰ）在 13 座车站中任选两个不同的车站，求两站间票价为 5 元的概率；

（Ⅱ）在土桥出站口随机调查了 n 名下车的乘客，将在八通线各站上车情况统计如下表：

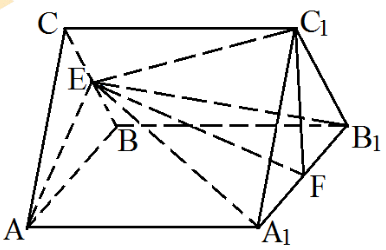
上车站点	通州北苑/果园/九棵树/梨园/临河里	双桥/管庄/八里桥	四惠/四惠东/高碑店/传媒大学
频率	0.2	a	b
人数	c	15	25

求 a,b,c,n 的值，并计算这 n 名乘客乘车平均消费金额；

（Ⅲ）某人从四惠站上车乘坐八通线到土桥站，中途任选一站出站一次，之后再从该站乘车．若想两次乘车花费总金额最少，可以选择中途哪站下车？（写出一个即可）

18．（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$底面 ABC，$\triangle ABC$是边长为 2 的正三角形，$AA_1=3$， E，F 分别为 BC，A_1B_1 的中点．



（Ⅰ）求证：平面 $ABC\perp$平面 BB_1C_1C；

（Ⅱ）求三棱锥 C_1-EFB_1 的体积；

（Ⅲ）在线段 A_1E 上是否存在一点 M，使直线 MF 与平面 BB_1C_1C 没有公共点？若存在，求 $\frac{A_1M}{ME}$ 的值；若不存在，请说明理由．

19．（本小题 14 分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(0,1)$，且椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）斜率为1的直线l交椭圆C于$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$两点，且$x_1>x_2$. 若在直线$x=3$上存在点P，使得ΔPMN是以$\angle PMN$为顶角的等腰直角三角形，求直线l的方程.

20．（本小题13分）

已知函数$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax(a\in \mathrm{R})$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程；

（Ⅱ）若$f(x)$是R上的单调递增函数，求a的取值范围；

（Ⅲ）若函数$t(x)=\begin{cases} f(x), x>0, \\ x^3-(a^2-a+1)x^2+5x-2, x<0 \end{cases}$对任意的实数$x_1(x_1\neq 0)$，存在唯一的实数$x_2$（$x_2\neq x_1$），使得$t'(x_1)=t'(x_2)$成立，求$a$的值.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	B	C	C	B

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5分，共 30 分.

9．1

10．$\sqrt{3}$

11．2

12．7

13．$\dfrac{25}{4}$

14．$\dfrac{1}{4}\le k\le 1$

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分．）

15．解：（Ⅰ）$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\cos 2x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

所以$f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$． ··················7 分

（Ⅱ）因为$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$.

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$f\left(x\right)$取得最大值1；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$．…………………………13 分

16．解：（Ⅰ）因为数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项依次成等比数列，

所以 $a_4=a_1\cdot q^3$，即 $-1=8\cdot q^3$．

所以 $q=-\frac{1}{2}$，从而 $a_3=a_1\cdot q^2=2$．

因为数列 $\{a_n\}$ 从第 3 项开始各项依次为等差数列，设公差为 d，

所以 $d=a_4-a_3=-3$，从而 $a_5=a_4+d=-4$．

所以 $q=-\frac{1}{2}$，$a_5=-4$；…………………………………………………8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_2=a_1q=-4$．

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=8$，

当 $n=2$ 时，$S_2=a_1+a_2=4$，

当 $n\geq 3$ 时，$S_n=a_1+a_2+(n-2)a_3+\frac{(n-2)[(n-2)-1)]}{2}d=-\frac{3}{2}n^2+\frac{19}{2}n-9$，此式对 $n=2$ 也成立．

综上所述，$S_n=\begin{cases} 8, & n=1, \\ -\frac{3}{2}n^2+\frac{19}{2}n-9, & n\geq 2\end{cases}$．…………………………………………13 分

17．（Ⅰ）记两站间票价 5 元为事件 A．

在 13 座车站中任选两个不同的车站，基本事件总数为 78 个，事件 A 中基本事件数为 15 个.

所以两站间票价为 5 元的概率 $P\left(A\right)=\frac{5}{26}$.　　　　　　　　　. . . . . .4 分

（Ⅱ）由表格数据知 $a+b=1-0.2=0.8$，

所以 $\frac{15+25}{n}=0.8$，即 $n=50$．

所以 $a=\frac{15}{n}=0.3$，$b=\frac{25}{n}=0.5$，$c=50-(15+25)=10$．　　　　　. . . . . .8 分

记 n 名乘客乘车平均消费金额为 $\bar{x}$， $\bar{x}=\dfrac{3\times10+4\times15+5\times25}{50}=4.3$ ……………10 分

（III）双桥，通州北苑．（写出一个即可） …………13 分

18．（Ⅰ）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为△ABC 为等边三角形，E 为 BC 中点，

所以 $AE\perp BC$. ……………………………………1 分

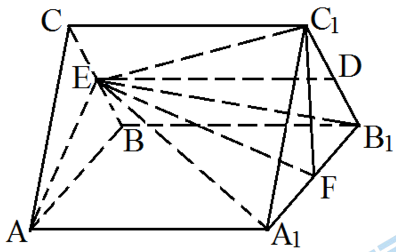
又 $AA_1\perp$平面 ABC，$AE\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp AE$.

因为 $BB_1\,//\,AA_1$，所以$BB_1\perp AE$. ……………………………………2 分

因为 $BC\bigcap BB_1=B$， $BC\subset$平面 BB_1C_1C， $BB_1\subset$平面 BB_1C_1C，

所以$AE\perp$平面BB_1C_1C. ……………………………………3 分

所以平面 $ABC\perp$平面



BB_1C_1C； ……………………………………4 分

（Ⅱ）解：$V_{C_1-EFB_1}=V_{E-FB_1C_1}$ ………………5 分

取 B_1C_1 的中点 D，连结 DE，则

$DE\,//\,BB_1$， $DE=BB_1$，

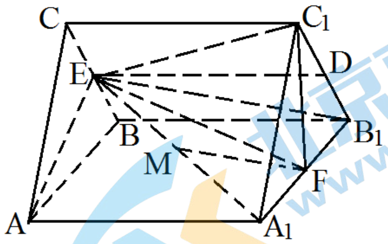
所以$DE\perp$平面$A_1B_1C_1$， $DE=3$. ………………6 分

又 F 是 A_1B_1 的中点，所以 $C_1F\perp A_1B_1$， $C_1F=\sqrt{3}$. ……………………………7 分

所以$V_{E-FB_1C_1}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta FB_1C_1}\cdot DE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot DE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}A_1B_1\cdot C_1F\cdot DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即三棱锥 C_1-EFB_1 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ················9 分

（III）解：在 A_1E 上存在一点 M，满足题意.



取 A_1E 中点 M，连结 MF. ················10 分

因为 F 是 A_1B_1 的中点，

所以 MF 是 ΔA_1B_1E 的中位线，

所以 $MF \mathbin{/\!/} B_1E$. ··11 分

因为 $MF \not\subset$ 平面 BB_1C_1C ，$B_1E \subset$ 平面 BB_1C_1C ，

所以 $MF \mathbin{/\!/}$ 平面 BB_1C_1C ， ··12 分

即直线 MF 与平面 BB_1C_1C 没有公共点. ··13 分

所以 $\dfrac{A_1M}{ME}=1$. ··14 分

19．解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} b=1, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ ·································3 分

解得 $a^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. ·································4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=x+m$ ，$P(3,y_P)$. ··························5分

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+y^2=1, \\ y=x+m \end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$. ···························7分

令 $\Delta=36m^2-48m^2+48>0$，得 $-2<m<2$. ··························8 分

$x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}m$ ，$x_1x_2=\dfrac{3}{4}(m^2-1)$. ·································9 分

因为 ΔPMN 是以 $\angle PMN$ 为顶角的等腰直角三角形，

所以 NP 平行于 x 轴.　　　　　　　　　　　　　　……………………………………………10分

过 M 做 $MQ\perp NP$ 于 Q，则 Q 为线段 NP 的中点.

设点 Q 的坐标为 $\left(x_Q,y_Q\right)$，则 $x_Q=x_M=x_1=\dfrac{x_2+3}{2}$.　　　　………………………12分

由方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}m,\\ x_1x_2=\dfrac{3}{4}(m^2-1),\\ x_1=\dfrac{x_2+3}{2},\end{cases}$ 得 $m^2+2m+1=0$，即 $m=-1$.　………………13分

而 $m=-1\in\left(-2,2\right)$，

所以直线 l 的方程为 $y=x-1$.　　　…………………………………………………14 分

20．解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x$，

所以 $f'(x)=e^x-x-1$，$f'(0)=0$，$f\left(0\right)=1$.

所以曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=1$.　　………………………………3 分

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数，

所以 $f'(x)=e^x-x-a\ge 0$ 恒成立，即 $f'(x)$ 的最小值 $f'\left(x\right)_{\min}\ge 0$.

令 $g\left(x\right)=f'(x)=e^x-x-a$，则 $g'(x)=e^x-1$.

在 $(-\infty,0)$，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减；在 $(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增.

所以 $f'(x)_{\min}=f(0)=1-a$.

所以 $1-a\ge 0$，即 $a\le 1$.

所以若 $f\left(x\right)$ 是 R 上的单调递增函数，则 a 的取值范围是 $\left(-\infty,1\right]$.　………………………7 分

（Ⅲ）当 $x<0$ 时，$t'(x)=3x^2-2(a^2-a+1)x+5$，

因为 $3>0$，$\dfrac{a^2-a+1}{3}>0$，

所以$t'(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，且$t'(x)>5$；

当$x>0$时，$t'(x)=f'(x)=e^x-x-a$，

由（Ⅱ）知$t'(x)$在$(0,+\infty)$递增，且$t'(x)>1-a$．

若对任意的实数x_1，存在唯一的实数x_2（$x_2\neq x_1$），使得$t'(x_1)=t'(x_2)$成立，则

（ⅰ）当$x_1<0$时，$x_2>0$．所以$1-a\leq 5$，即$a\geq -4$；

（ⅱ）当$x_1>0$时，$x_2<0$．所以$1-a\geq 5$，即$a\leq -4$．

综合（ⅰ）（ⅱ）可得$a=-4$．……………………………………………………………13 分

注：解答题学生若有其它解法，请酌情给分