2023 北京八十中高二（下）期中

数　　学

2023 年 04 月

班级＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿考号＿＿＿＿＿＿

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

提示：试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色签字笔作答.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.

1. 某质点沿直线运动的位移 $s(\mathrm{m})$ 与时间 $t(\mathrm{min})$ 的关系是 $s(t)=t^2+t$，则质点在 $t=2\mathrm{min}$ 时的瞬时速度为（　）

A. 2m/min　　B. 4m/min　　C. 5m/min　　D. 6m/min

2. 对变量 x，y 由观测数据得散点图 1；对变量 y，z 由观测数据得散点图 2．由这两个散点图可以判断（　）.

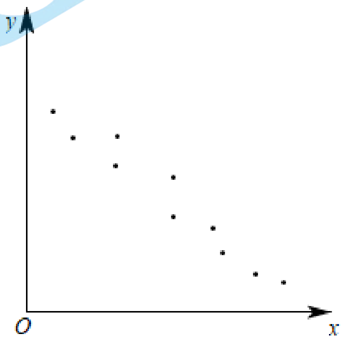


图1

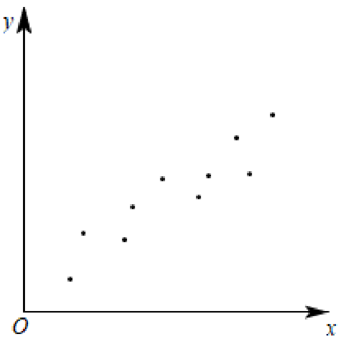


图2

A. 变量 x 与 y 正相关，x 与 z 正相关　　B. 变量 x 与 y 正相关，x 与 z 负相关

C. 变量 x 与 y 负相关，x 与 z 正相关　　D. 变量 x 与 y 负相关，x 与 z 负相关

3. 一个口袋中装有 5 个白球和 3 个黑球，这些球除了颜色外完全相同，从中模出 2 个球，恰有一个黑球的概率为（　）

A. $\dfrac{15}{56}$　　B. $\dfrac{15}{28}$　　C. $\dfrac{3}{28}$　　D. $\dfrac{3}{8}$

4. 在 5 道题中有 3 道数学题和 2 道物理题，如果不放回地依次抽取 2 道题，则在第一次抽到数学题条件下，第二次抽到数学题的概率是（　）

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

5. 已知 $(x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$（　）

A. -10　　B. 10 1　　C. 1　　D. -1

6. 已知函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，则 $f\left(x\right)$ 的极小值点为（　）

A. -3　　B. 1　　C. $6e^{-3}$　　D. $-2e$

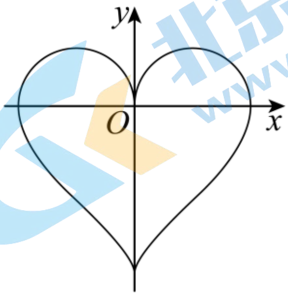
7. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(2,\sigma^2\right)$，且 $P\left(0<\xi<2\right)=0.3$，则 $P\left(\xi>4\right)=$（　）

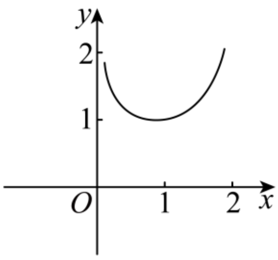
A. 0.6　　B. 0.4　　C. 0.3　　D. 0.2

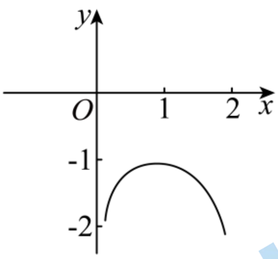
8. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x-a}\left(a>0\right)$ 在 $\left(1,2\right)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　）

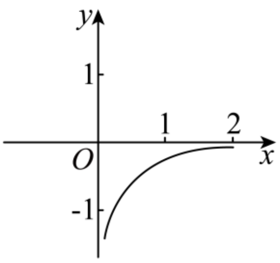
A. $a\le 1$ 或 $a\ge 2$　　B. $a\ge 2$　　C. $a\ge 2$ 或 $a=1$　　D. $a\ge 1$

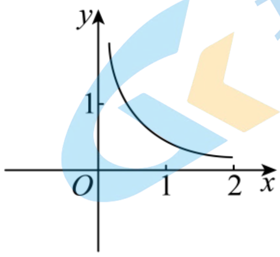
9. 笛卡尔心形线的极坐标方程是 $\rho=a(1-\sin\theta)(a>0)$．某同学利用 *GeoGebra* 电脑软件将 $f(x)=\sqrt{1-(|x|-1)^2}$，$g(x)=-3\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}}$ 两个画在同一直角坐标系中，得到了如图“心形线”．观察图形，当 $x>0$ 时，$g(x)$ 的导函数 $g'\left(x\right)$ 的图象为（　）



A.


B.


C.


D.


10. 二进制数是用 0 和 1 表示的数，它的基数为 2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”，二制数 $\left(a_0a_1a_2\ldots a_k\right)_2$（$k\in N^*$）对应的十进制数记为 m_k，即 $m_k=a_0\times 2^k+a_1\times 2^{k-1}+\ldots+a_{k-1}\times 2+a_k\times 2^0$，其中 $a_0=1$，$a_i\in\left\{0,1\right\}$（$i=1,2,3,\ldots$，k），则在 a_0，a_1，$a_2,\ldots a_8$ 中恰好有 2 个 0 的所有二进制数 $(a_0a_1\ldots a_8)_2$ 对应的十进制数的总和为（　）

A. 1910　　B. 1990　　C. 12252　　D. 12523

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

11. 二项式 $(\frac{1}{x}+x)^6$ 展开式中的常数项是__.（用数字作答）

12. 世界数学三大猜想：“费马猜想”、“四色猜想”、“哥德巴赫猜想”，其中“四色猜想”和“费马猜想”已经分别在1976年和1994年荣升为“四色定理”和“费马大定理”．如今，哥德巴赫猜想仍未解决．哥德巴赫猜想描述为：任何不小于4的偶数，都可以写成两个质数之和．（质数是指在大于1的自然数中，除了1和它本身以外不再有其他因数的自然数）．在不超过17的质数中，随机选取两个不同的数，其和为奇数取法有________种．

13. 有3台车床加工同一型号的零件，第1台加工的次品率为5%，第2，3台加工的次品率均为4%，加工出来的零件混放在一起；已知第1，2，3台车床加工的零件数分别占总数的25%，30%，45%．现任取一个零件，则该零件是次品的概率为__________.

14. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{k}{2\mathrm{e}}$ 有两个零点，则写出符合上述要求的一个实数 k 的值为________.

15. 我国南宋数学家杨辉在1261年所著的《详解九章算法》里，出现了图1这张表.杨辉三角的发现比欧洲早500年左右.如图2，杨辉三角的第 n 行的各数就是 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数.

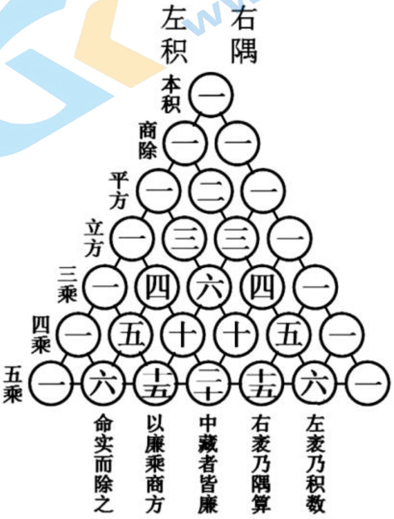


图1

第0行 1

第1行 1 1

第2行 1 2 1

第3行 1 3 3 1

第4行 1 4 6 4 1

第5行 1 5 10 10 5 1

第6行 1 6 15 20 15 6 1

⋮

第 n-1行 1 C_{n-1}^1 C_{n-1}^2 … C_{n-1}^{r-1} C_{n-1}^{r} … C_{n-1}^{n-2} 1

第 n 行 1 C_n^1 C_n^2 … C_n^{r-1} C_n^r C_n^{r+1} … C_n^{n-1} 1

图2

则第10行共有___________个奇数；第100行共有___________个奇数.

16. 已知函数 $f(x)=2x^2-e^{|x|}$，关于函数 $f(x)$ 给出下列命题：

①函数 $f(x)$ 为偶函数；

②函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 单调递增；

③函数 $f(x)$ 存在两个零点；

④函数 $f(x)$ 存在极大值和极小值.

其中正确命题的序号是________.

三、解答题：本大题共5小题，共70分．

17. 为加强素质教育，提升学生综合素养，某中学为高一年级提供了“书法”和“剪纸”两门选修课.为了了解选择“书法”或“剪纸”是否与性别有关，调查了高一年级 1500 名学生的选择倾向，随机抽取了 100 人，统计选择两门课程人数如下表：

（1）补全 2×2 列联表；

	选书法	选剪纸	共计
男生	40		50
女生			
共计		30	

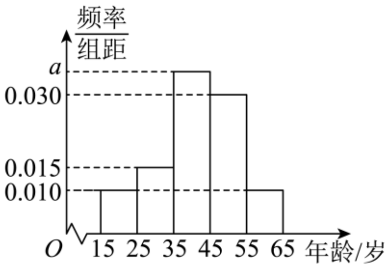
（2）是否有95%的把握认为选择“书法”或“剪纸”与性别有关？（计算结果保留到小数点后三位，例如：3.841）

参考附表：

α	0.100	0.050	0.025
x_0	2.706	3.841	5.024

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

18. “绿水青山就是金山银山”的理念越来越深入人心．据此，某网站调查了人们对生态文明建设的关注情况，调查数据表明，关注生态文明建设的约占 80%．现从参与调查的关注生态文明建设的人员中随机选出 200 人，并将这 200 人按年龄（单位：岁）分组：第 1 组[15，25)，第 2 组[25，35)，第 3 组[35，45)，第 4 组[45，55)，第 5 组[55，65]，得到的频率分布直方图如图所示．



（1）求 a 的值；

（2）现在要从年龄在第 1，2 组的人员中用分层抽样的方法抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 3 人进行问卷调查，求抽取的 3 人中至少 1 人的年龄在第 1 组中的概率；

（3）用频率估计概率，从所有参与生态文明建设关注调查的人员（假设人数很多，各人是否关注生态文明建设互不影响）中任意选出 3 人，设这 3 人中关注生态文明建设的人数为 X．求随机变量 X 的分布列及期望．

19. 已知函数 $f(x)=x^3-3x$.

（1）求 $f'(0)$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right]$ 上的最值；

（3）若 $g(x)=f(x)+(a-1)x^3$，求 $g(x)$ 的单调区间.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x-x\cos x-ax\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线与直线 $y=x+2$ 平行.

（i）求 a 的值；

（ii）证明：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 内有唯一极值点；

（2）当 $a\le 1$ 时，证明：对任意 $x\in\left(0,\pi\right)$，$f\left(x\right)>0$.

21. 对于无穷数列 $\left\{c_n\right\}$，若对任意 $m,n\in\mathrm{N}^*$，且 $m\ne n$，存在 $k\in\mathrm{N}^*$，使得 $c_m+c_n=c_k$ 成立，则称 $\left\{c_n\right\}$ 为“G 数列”.

（1）若数列 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式为 $b_n=2n$，$\left\{t_n\right\}$ 的通项公式为 $t_n=2n+1$，分别判断 $\left\{b_n\right\},\left\{t_n\right\}$ 是否为“G 数列”，并说明理由；

（2）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，

①若 $\left\{a_n\right\}$ 是“G 数列”，$a_1=8,a_2\in\mathrm{N}^*$，且 $a_2>a_1$，求 a_2 所有可能的取值；

②若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，存在 $k\in\mathrm{N}^*$，使得 $a_k=S_n$ 成立，求证：数列 $\left\{a_n\right\}$ 为“G 数列”.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.

1.【答案】C

【解析】

【分析】根据导数的物理意义，求导即可得到瞬时速度.

【详解】解：$v(t)=s'(t)=2t+1$，当 $t=2$ 时，$v(2)=5$.

故选：C.

2.【答案】D

【解析】

【分析】利用散点图判断.

【详解】解：由散点图知：变量 x 与 y 负相关，y 与 z 正相关，

所以 x 与 z 负相关.

故选：D.

3.【答案】B

【解析】

【分析】根据组合计数，结合古典概率公式求解即可.

【详解】解：由题知，从装有 5 个白球和 3 个黑球，模出 2 个球，共有 $C_8^2=28$ 种，

其中，恰有一个黑球的共有 $C_5^1C_3^1=15$ 种，

所以，恰有一个黑球的概率为 $P=\dfrac{15}{28}$.

故选：B

4.【答案】B

【解析】

【分析】法一：分析出第一次抽到数学题条件下，剩余试题的特征，从而求出概率；法二：设出事件，利用条件概率公式进行求解.

【详解】法一：因为第一次抽到数学题条件下，还剩下 4 道试题，有 2 道数学题和 2 道物理题，因此第二次抽到数学题的概率是 $\frac{1}{2}$；

法二：设第二次抽到数学题为事件 A，第一次抽到数学题为事件 B，

则 $P(AB)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$，$P(B)=\dfrac{C_3^1}{C_5^1}=\dfrac{3}{5}$，

则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{2}$.

故选：B

5.【答案】D

【解析】

【分析】令 $f(x)=(x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，利用赋值法可得出

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=f(1)-f(0)$，即可得解.

【详解】令 $f(x)=(x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，

则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10})-a_0=f(1)-f(0)=0-1=-1$，

故选：D.

6.【答案】B

【解析】

【分析】$f(x)$ 的定义域为 R，求导得 $f'(x)=(x+3)(x-1)e^x$，分析 $f'(x)$ 的符号，$f(x)$ 的单调性，极值点，即可得出答案.

【详解】解：$f(x)$ 的定义域为 R，

$f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x=(x^2+2x-3)e^x=(x+3)(x-1)e^x$，

所以在 $(-\infty,-3)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $(-3,1)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

故选：B.

7.【答案】D

【解析】

【分析】根据随机变量服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，求得其图象的对称轴 $x=2$，再根据曲线的对称性，即可求解答案.

【详解】解：由题意，随机变量服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，所以 $\mu=2$，即图象的对称轴为 $x=2$，

又由 $P(0<\xi<2)=0.3$，则 $P(2<\xi<4)=0.3$，

则 $P(\xi>4)=\dfrac{1-P(0<\xi<4)}{2}=0.2$，

故选：D.

8.【答案】C

【解析】

【分析】由题可求导函数，利用导函数与单调性的关系可得 $x^2-2ax\le 0$ 在 $1,2$ 恒成立，即求.

【详解】由题意，$x-a\ne 0$ 在 $1,2$ 恒成立，则 $a\notin(1,2)$，

又 $f'(x)=\dfrac{2x(x-a)-x^2}{(x-a)^2}=\dfrac{x^2-2ax}{(x-a)^2}$，

$\therefore f'(x)\le 0$ 在 $1,2$ 恒成立，

$\therefore x^2-2ax\le 0$ 即 $a\ge\dfrac{x}{2}$ 在 $1,2$ 恒成立，$\therefore a\ge 1$，

综上，$a\ge 2$ 或 $a=1$.

故选：C.

9.【答案】A

【解析】

【分析】易得函数 $g(x)$ 表示如图"心形线"中 x 轴下方的图象，再根据函数 $g(x)$ 的单调性及切线斜率的变化情况即可得解.

【详解】因为 $f(x)=\sqrt{1-(|x|-1)^2}\ge 0$，$g(x)=-3\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}}\le 0$，

所以函数 $g(x)$ 表示如图"心形线"中 x 轴下方的图象，

由 $g(x)=-3\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}}$ 得 $1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}\ge 0$，所以 $-2\le x\le 2$

由图可知函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，可得 $g'(x)>0$，故排除 BC，

又函数 $g(x)$ 在 $x>0$ 时的图象的切线斜率先减小后增大，排除 D，

故函数 $g'(x)$ 的先减后增，故只有 A 选项符合题意.

故选：A.

10.【答案】D

【解析】

【分析】利用等比数列前 n 项和以及组合数问题可解

【详解】根据题意得 $m_8=1\times 2^8+a_1\times 2^7+a_2\times 2^6+\ldots+a_8\times 2^0$，因为在 a_0,a_1，$a_2,\ldots a_8$ 中恰好有 2 个 0 的有 $C_8^2=28$ 种可能，即所有符合条件的二进制数 $(a_0a_1a_2\ldots a_8)_2$ 的个数为 28.

所以所有二进制数 $(a_0a_1a_2\ldots a_8)_2$ 对应的十进制数的和中，2^8 出现 $C_8^2=28$ 次，2^7，$2^6\ldots$，2，2^0 均出现 $C_7^2=21$ 次，所以满足 a_0,a_1，$a_2,\ldots a_8$ 中恰好有 2 个 0 的所有二进制数 $(a_0a_1a_2\ldots a_8)_2$ 对应的十进制数的和为 $C_7^2(2^7+2^6+\ldots+2+2^0)+C_8^2 2^8=21\times 255+28\times 256=12523$

故选：D.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.【答案】20

【解析】

【分析】根据二项式的展开公式求解即可.

【详解】二项式$(\frac{1}{x}+x)^6$展开式的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\cdot(\frac{1}{x})^{6-r}x^r=\mathrm{C}_6^r\cdot x^{2r-6}$，

令$2r-6=0$，得$r=3$，

所以展开式中的常数项是$\mathrm{C}_6^3=20$.

故答案为:20.

12.【答案】6

【解析】

【分析】列举出不超过17的质数，分析可知2必取，然后在剩余6个奇数中任选一个即可，即可得出不同的选法种数.

【详解】不超过17的质数有：2、3、5、7、11、13、17，共7个，

在这7个数中随机选取两个不同的数，其和为奇数，则2必取，

然后在剩余6个奇数中任选一个即可，

所以，不同的取法种数为6种.

故答案为：6.

13.【答案】4.25% ## 0.0425

【解析】

【分析】根据条件，结合全概率公式求解即可.

【详解】解：由全概率公式可得，任取一个零件，则该零件是次品的概率为

$\left(0.25\times0.05+0.3\times0.04+0.45\times0.04\right)\times100\%=4.25\%$.

故答案为：4.25%

14.【答案】1（答案不唯一，满足$k\in\left(0,2\right)$即可）

【解析】

【分析】根据题意分析可得原题意等价于$y=g\left(x\right)$与$y=\frac{k}{2\mathrm{e}}$有两个交点，求导，利用导数判断$y=g\left(x\right)$的单调性与最值，结合图象分析运算.

【详解】令$f(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{k}{2\mathrm{e}}=0$，则$\frac{\ln x}{x}=\frac{k}{2\mathrm{e}}$，

构造$g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，原题意等价于$y=g\left(x\right)$与$y=\frac{k}{2\mathrm{e}}$有两个交点，

因为 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $g'(x)>0$，则 $0<x<\mathrm{e}$；令 $g'(x)<0$，则 $x>\mathrm{e}$；

则 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

可得 $g(x)\le g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

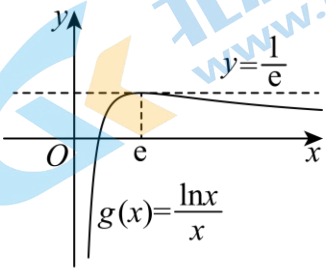
且当 x 趋近于 0，$g(x)$ 趋近于 $-\infty$，当 x 趋近于 $+\infty$，$g(x)$ 趋近于 0，

结合 $g(x)$ 的图象可知：若 $y=g(x)$ 与 $y=\dfrac{k}{2\mathrm{e}}$ 有两个交点，则 $0<\dfrac{k}{2\mathrm{e}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

解得 $0<k<2$，

所以实数 k 的取值范围为 $(0,2)$，且 $1\in(0,2)$.

故答案为：1（答案不唯一，满足 $k\in(0,2)$ 即可）



【点睛】

15.【答案】　①. 4　②. 8

【解析】

【分析】根据图 2 可知第 7 行的数全部是奇数，再进一步得到第 15 行也全部是奇数，从而找到规律，即可得答案；

【详解】由杨辉三角可得如下表：

第 1 行，2 个；第 2 行，2 个；第 3 行，4 个；第 4 行，2 个；第 5 行，4 个；

第 6 行，4 个；第 7 行，8 个；

第 8 行，2 个；第 9 行，4 个；第 10 行，4 个；第 11 行，8 个；第 12 行，4 个；

第 13 行，8 个；第 14 行，8 个；第 15 行，16 个；

第 16 行，2 个；第 17 行，4 个；第 18 行，4 个；第 19 行，8 个；第 20 行，4 个；

第 21 行，8 个；第 22 行，8 个；第 23 行，16 个；

……

第 96 行，4 个；第 97 行，8 个；第 98 行，8 个；第 99 行，16 个；第 100 行，8 个；

故答案为：4；8.

16.【答案】①②④

【解析】

【分析】①根据偶函数的定义，即可判断①正确；

②当 $x>0$ 时，求出 $f'(x)=4x-e^x$，并分析其单调性，得 $f'(x)>0$ 对 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 单调递增，②正确；

③由②可知，当 $x>0$ 时 $f'(x)$ 的单调性，并由零点存在定理可知其有两个零点，进而判断出 $f(x)$ 的单调性，再根据零点存在定理可判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，由 $f(x)$ 为偶函数可知，其在 R 上存在四个零点，故③错误；

④由③可知，$f(x)$ 存在极大值和极小值，故④正确.

【详解】①：定义域为 R，$f(-x)=2(-x)^2-e^{|-x|}=2x^2-e^{|x|}=f(x)$，

则函数为偶函数，故①正确；

②：当 $x>0$ 时，$f'(x)=4x-e^x$，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=4-e^x$，

由 $g'(x)=0$ 解得 $x=\ln 4$，

则当 $x\in(0,\ln 4)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

又由 $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$ 及 $\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq(0,\ln 4)$ 可知，

$g(x)>0$ 即 $f'(x)>0$ 对 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，

则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 单调递增，故②正确；

③：由②可知，

$f'(x)=4x-e^x$ 在 $(0,\ln 4)$ 单调递增，$(\ln 4,+\infty)$ 单调递减，

又 $f'(0)=-1<0$，$f'(2)=8-e^2>0$，$f'(3)=12-e^3<0$，

由零点存在定理知，$\exists x_1\in(0,2),x_2\in(2,3)$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递减，(x_1,x_2) 单调递增，$(x_2,+\infty)$ 单调递减.

又 $f(0)=-1<0$，$f(2)=8-e^2>0$，$f(3)=18-e^3<0$，

由零点存在定理可知，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，

又由 $f(x)$ 为偶函数可知，其在 R 上存在四个零点，故③错误；

④：由③可知 $f(x_1)$ 为极小值，$f(x_2)$ 为极大值，

又由偶函数可知，$f(-x_1)$ 为极小值，$f(-x_2)$ 为极大值，

故④正确.

故答案为：①②④.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是对导函数继续进行求导，以及利用零点存在定理，找到导函数的单调区间，则可求得原函数的单调性，同时又可以判断函数的零点个数和极值.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分.

17.【答案】(1) 列联表见解析

(2) 有

【解析】

【分析】(1) 直接根据表中数据即可完成列联表;

(2) 根据公式求出 χ^2，再对照临界值表，即可得出结论.

【小问 1 详解】

根据题意补全 2×2 列联表，如下：

	选书法	选剪纸	共计
男生	40	10	50
女生	30	20	50
共计	70	30	100

【小问 2 详解】根据列联表中数据，得 $\chi^2=\frac{100\times(40\times20-10\times30)^2}{50\times50\times70\times30}\approx4.762>3.841$，

所以有 95% 的把握认为选“书法”或“剪纸”与性别有关.

18.【答案】(1) 0.035

(2) $\frac{9}{10}$

(3) 分布列见解析，$\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据频率和为 1 求 a；

(2) 根据题意结合古典概型分析运算；

(3) 根据题意可得 $X\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$，根据二项分布求分布列和期望.

【小问 1 详解】

由小矩形面积和等于 1 可得：$(0.01+0.015+a+0.03+0.01)\times10=1$，解得 $a=0.035$.

【小问 2 详解】

第 1 组总人数为 200×0.01×10＝20，第 2 组总人数为 200×0.015×10＝30

根据分层抽样可得：第 1 组抽取 $5\times\frac{20}{50}=2$ 人，第 2 组抽取 $5\times\frac{30}{50}=3$ 人

再从这 5 人中抽取 3 人，设至少 1 人的年龄在第 1 组中的事件为 A，其概率为 $P(A)=1-\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{9}{10}$.

【小问 3 详解】

由题意可知：$X\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$，则有：

$P(X=0)=(\frac{1}{5})^3=\frac{1}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}=\frac{48}{125}$，$P(X=3)=(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125}$.

∴X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

可得 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$.

19.【答案】（1）-3

（2）最大值为2，最小值为-18

（3）答案见解析

【解析】

【分析】（1）求导，再令 $x=0$ 即可得解；

（2）利用导数求出函数的单调区间，在求出函数的极值和端点的函数值，即可得出函数的最值；

（3）求导，再分 $a\le 0$ 和 $a>0$ 两种情况讨论即可得解.

【小问 1 详解】

$f'(x)=3x^2-3$，则 $f'(0)=-3$；

【小问 2 详解】

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

当$-3<x<-1$或$1<x<\frac{3}{2}$时，$f'(x)>0$，当$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在$(-3,-1)$,$\left(1,\frac{3}{2}\right)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，

又 $f(-3)=-18, f(-1)=2, f(1)=-2, f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ 上的最大值为 2，最小值为 -18；

【小问 3 详解】

$g(x)=f(x)+(a-1)x^3=ax^3-3x$，$g'(x)=3\left(ax^2-1\right)$，

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)<0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

当 $a>0$ 时，$x>\frac{\sqrt{a}}{a}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{a}}{a}$ 时，$g'(x)>0$，当 $-\frac{\sqrt{a}}{a}<x<\frac{\sqrt{a}}{a}$ 时，$g'(x)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right),\left(-\infty,-\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{\sqrt{a}}{a},\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递减，

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$g(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的单调增区间为 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right),\left(-\infty,-\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$，单调减区间为 $\left(-\frac{\sqrt{a}}{a},\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$；

20.【答案】（1）（i）$a=0$；（ii）证明见解析；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）（i）求出 $f'(x)$，由直线平行的充要条件得到切线的斜率，根据导数的几何意义求出 a 的值，即可得到答案；

（ii）求出 $f'(x)$，令 $g(x)=f'(x)$，利用导数研究 $g(x)$ 的单调性，从而得到 $g(x)$ 的取值情况，由此得到 $f(x)$ 的单调性，结合极值的定义进行分析，即可证明；

（2）利用（1）中的单调性，分 $a\le -1$，$-1<a\le 1$ 两种情况，分别利用导数研究函数的单调性，确定函数 $f(x)$ 的取值情况，由此证明结论.

【详解】（1）（i）解：因为函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-ax$，

所以 $f'(x)=\cos x+x\sin x-a$，

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $y=x+2$ 平行，

所以切线的斜率为 1，

则 $f'(0)=1$，即 $1-a=1$，解得 $a=0$，

检验：当 $a=0$ 时，$f(0)=0$，因此切线方程为 $y=x$，符合题意，

故 $a=0$.

（ii）证明：由（i）可知，$a=0$，则 $f'(x)=\cos x+x\sin x$，

令 $g(x)=f'(x)=\cos x+x\sin x$，则 $g'(x)=x\cos x$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，即 $f'(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减，即 $f'(x)$ 单调递减，

又 $f'(0)=1>0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$，$f'(\pi)=-1<0$，

故存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'\ \ x\ \ >0$，则 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，

所以当 $x=x_0$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(x_0)$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有唯一极值点.

（2）证明：由（1）可知，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f'(x)$ 单调递减，

因为 $a\le 1$，则 $f'(0)=1-a\ge 0$，且 $f'(\pi)=-1-a$，

①若 $-1-a\ge 0$，即 $a\le -1$ 时，则 $f'(\pi)>0$，

所以 $f'\ \ x\ \ >0$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，

故 $f(x)>f(0)=2\sin 0=0$，符合题意；

②若 $-1-a<0$，即 $-1<a\le 1$ 时，$f'(\pi)<0$，

因为 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-a>0$，

故存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'\ \ x\ \ >0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，

所以当 $x=x_0$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(x_0)$，

即 $f(x)>f(0)=0$ 且 $f(x)>f(\pi)=\pi(1-a)>0$，符合题意.

综上所述，当 $a\le 1$ 时，对任意 $x\in(0,\pi)$，$f(x)>0$.

21.【答案】（1）$\{b_n\}$ 是“G 数列”，$\{t_n\}$ 不是“G 数列”；

（2）①9, 10, 12, 16；②证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据“G 数列”的定义验证即可；

（2）①设公差为d，利用“G 数列”定义得d 是 8 的正约数：1，2，4，8，分别求出a_2并验证符合题意即得；

②利用$a_1+a_2=S_2=a_k$，求出公差d与首项a_1的关系，然后表示出通项公式a_n，再根据“G 数列”定义证明.

【小问 1 详解】

$b_n=2n$，对任意的$m,n\in N^*$，$m\neq n$，$b_m=2m$，$b_n=2n$，$b_m+b_n=2m+2n=2(m+n)$，

取$k=m+n$，则$b_m+b_n=b_k$，$\therefore\{b_n\}$是“G 数列”，

$t_n=2n+1$，对任意的$m,n\in N^*$，$m\neq n$，$t_m=2m+1$，$t_n=2n+1$，

$t_m+t_n=2m+2n+2=2(m+n+1)$为偶数，而$t_n=2n+1$为奇数，因此不存在$k\in N^*$

使得$t_m+t_n=t_k$，$\therefore\{t_n\}$不是“G 数列”；

【小问 2 详解】

数列$\{a_n\}$为等差数列，

①若$\{a_n\}$是“G 数列，$a_1=8,a_2\in N^*$，且$a_2>a_1$，$d=a_2-a_1>0$，$d\in N^*$，

$a_n=8+(n-1)d$，

对任意的$m,n\in N^*$，$m\neq n$，$a_m=8+(m-1)d$，$a_n=8+(n-1)d$，

$a_m+a_n=8+8+(m+n-2)d$，由题意存在$k\in N^*$，使得$a_m+a_n=a_k$，

即$8+8+(m+n-2)d=8+(k-1)d$，显然$k\geq m+n$，

所以$(m+n-2)d+8=(k-1)d$，$(k-m-n+1)d=8$，

$k-m-n+1\in N^*$，所以d 是 8 的正约数，即$d=1$，2，4，8，

$d=1$时，$a_2=9$，$k=m+n+7$；

$d=2$时，$a_2=10$，$k=m+n+3$；

$d=4$时，$a_2=12$，$k=m+n+1$；

$d=8$时，$a_2=16$，$k=m+n$.

综上，a_2的可能值为 9，10，12，16；

②若对任意$n\in N^*$，存在$k\in N^*$，使得$a_k=S_n$成立，

所以存在$t\in N^*$，$a_1+a_2=S_2=a_t$，$t\geq 3$，

设$\{a_n\}$公差为d，则$2a_1+d=a_1+(t-1)d$，$a_1=(t-2)d$，

$a_n=(t-2)d+(n-1)d=(t+n-3)d$，

对任意的 $m,n\in\mathrm{N}^*$，$m\neq n$，$a_m=(t+m-3)d$，$a_n=(t+n-3)d$，

$a_m+a_n=(2t+m+n-6)d$，取 $k=t+m+n-3\in\mathrm{N}^*$，则

$a_k=(t-3+k)d=(2t+m+n-6)d=a_m+a_n$，

所以 $\{a_n\}$ 是“G 数列”．

【点睛】关键点点睛：本题考查数列新定义，解题关键是理解新定义并应用新定义求解．第（2）问中，第一个问题是直接利用等差数列的通项公式根据新定义进行验证即可，第二个问题关键是确定数列的通项公式，因此根据已知条件求得数列的首项与公差的关系，这样通项公式中相当于只含有一个参数 d（或 a_1），然后利用通项公式进行检验．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂ 精益求精、专业严谨 ＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。