

中国人民大学附属中学 2020 届高三 12 月月考

数学试题

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 集合 $P = \{x | x^2 - 16 < 0\}$, $Q = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $P \cap Q =$ 【 】

A. $\{-2, 2\}$

B. $\{-2, 2, -4, 4\}$

C. $\{-2, 0, 2\}$

D. $\{-2, 2, 0, -4, 4\}$

2. 等比数列 $x, 3x+3, 6x+6, \dots$ 的第 4 项等于 【 】

A. -24

B. 0

C. 12

D. 24

3. 某林场有树苗 30000 棵，其中松树苗 4000 棵，为调查树苗的生长情况，采用分层抽样的方法抽取一个容量为 150 的样本，则样本中树苗的数量为 【 】

A. 30

B. 25

C. 20

D. 15

4. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $|a| > |b|$ ”的 【 】

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知直线 $l: x \cos \theta + y \sin \theta - 1 = 0 (\theta \in \mathbb{R})$, 则直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是 【 】

A. 相离

B. 相切

C. 相交

D. 随 θ 的变化而变化

6. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2 + m} - \frac{y^2}{3m^2 - n} = 1 (m, n \in \mathbb{R})$ 表示焦点在 x 轴的双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为 4，

则 n 的取值范围是 【 】

A. $(-1, 3)$

B. $(-1, \sqrt{3})$

C. $(0, 3)$

D. $(0, \sqrt{3})$

7. 三条直线 $l_1: x-y=0, l_2: x+y-2=0, l_3: 5x-ky-15=0$ 围成一个三角形, 则 k 的取值范围是【 】

A. $\{k | k \neq \pm 5 \text{ 且 } k \neq 1\}$

B. $\{k | k \neq \pm 5 \text{ 且 } k \neq -10\}$

C. $\{k | k \neq \pm 1 \text{ 且 } k \neq 0\}$

D. $\{k | k \neq \pm 5\}$

8. 某班有 50 名学生, 某次考试的成绩经计算得到的平均分是 60 分, 标准差是 s_1 , 后来发现记录有误, 某同学甲得 70 分误记为 20 分, 某同学乙得 30 分误记为 50 分, 某同学丙得 50 分误记为 80 分, 更正后重新计算得到的标准差为 s_2 , 则 s_1 与 s_2 间的大小关系是【 】

A. $s_1 = s_2$

B. $s_1 > s_2$

C. $s_1 < s_2$

D. 不能确定

9. 若 $a > b > 0$, 且 $ab = 1$, 则下列不等式成立的是【 】

A. $a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a} < \log_2(a+b)$

B. $\frac{b}{2^a} < \log_2(a+b) < a + \frac{1}{b}$

C. $a + \frac{1}{b} < \log_2(a+b) < \frac{b}{2^a}$

D. $\log_2(a+b) < a + \frac{1}{b} < \frac{b}{2^a}$

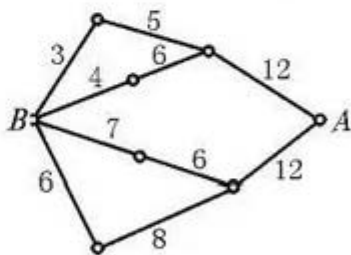
10. 如图, 小圆点表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相连, 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量, 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递, 则单位时间内传递的最大信息量为【 】

A. 26

B. 24

C. 20

D. 19



二、填空题 (本大题共 6 道小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点坐标为_____.

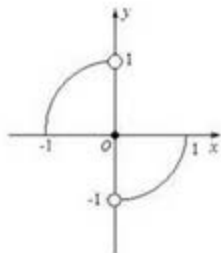
12. 将函数 $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 【公众号: 晓观数学】得到函数 $g(x)$,

则函数 $g(x) =$ _____.

13. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = (2, 1)$, 且 $\lambda\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} (\lambda \in \mathbb{R})$, 则 $|\lambda| =$ _____.

14. 已知函数 $y = f(x), x \in [-1, 1]$ 的图像是由以原点为圆心的两段弧及原点构成 (如图所示), 则不等式

$f(-x) > f(x) + 2x$ 的解集为_____.



15. 我国古代的天文学和数学著作《周髀算经》中记载: 一年有二十四个节气, 每个节气晷 (gui) 长损益相同 (晷是按照日影测定时刻的仪器, 晷长即为所测量影子的长度). 夏至、小暑、大暑、立秋、处暑、白露、秋分、寒露、霜降、立冬、小雪、大雪是连续十二个节气, 其节气日影长依次成等差数列. 经记录测算: 夏至、处暑、霜降三个节气日影子长之和为 16.5 尺, 这十二节气的所有日影子长之和为 84 尺, 则夏至的日影子长为_____尺.



16. 定义域为集合 $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 上的函数 $f(x)$ 满足:

① $f(1) = 1$; ② $|f(x+1) - f(x)| = 1 (x = 1, 2, \dots, 11)$; ③ $f(1), f(6), f(12)$ 成等比数列.

则 (1) $f(12) =$ _____:

(2) 满足条件的函数 $f(x)$ 的个数为_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分.解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程，请将解答题的答案填写在“答题纸”相应位置上.）

17.（本小题满分 13 分）已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 且 $f(x_0) = \frac{1}{2}$, 求 $f(2x_0)$ 的值.

18.（本小题满分 13 分）在 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分别是内角 A 、 B 、 C 的对边，且

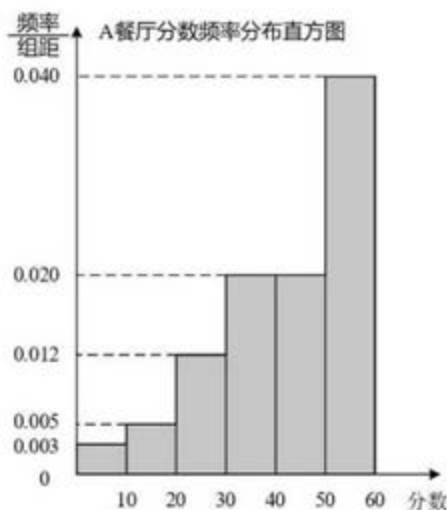
$$\sqrt{3}bc \cos A = \sin A(a \cos C + c \cos A).$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. (本小题满分 13 分) 某大学为调研学生在 A, B 两家餐厅用餐的满意度, 从在 A, B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取了 100 人, 每人分别对这两家餐厅进行评分, 满分均为 60 分.

整理评分数据, 将分数以 10 为组距分为 6 组: $[0,10), [10,20), [20,30), [30,40), [40,50), [50,60)$, 得到 A 餐厅分数的频率分布直方图, 和 B 餐厅分数的频数分布表:



分数区间	频数
$[0,10)$	2
$[10,20)$	3
$[20,30)$	5
$[30,40)$	15
$[40,50)$	40
$[50,60)$	35

- (1) 在抽样的 100 人中, 求对 A 餐厅评分低于 30 的人数;
- (2) 从对 B 餐厅评分在 $[0,20)$ 范围内的人中随机选出 2 人, 求 2 人中恰有 1 人评分在 $[0,10)$ 范围内的概率;
- (3) 如果从 A, B 两家餐厅中选择一家用餐, 你会选择哪一家? 说明理由.

20. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax + 1, (a \in R)$.

- (1) 当 $a = 6$ 时, 直线 $y = -6x + m$ 与 $f(x)$ 相切, 求 m 的值;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 求此时函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 当 $a > 0$ 时, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值的和为 1, 求实数 a 的值.

21. (本小题满分 14 分) 如图, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$, 点 B, C 分别是椭圆

E 的上下顶点, $\triangle OBF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程和离心率;

(2) 点 P 是直线 $l: y = -2$ 上的一个动点 (与 y 轴交点除外), 直线 PC 交椭圆于另一点 M . 求 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PM}$ 的取值范围.

22. (本小题满分 13 分) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $b_n = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, 若 $b_{n+1}b_{n-1} = b_n (n \geq 2)$, 且

$$b_1 = 1, b_2 = 2.$$

(1) 证明 $\{b_n\}$ 是周期数列;

(2) 记 $c_n = a_{6n-1} (n \geq 1)$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 为等差数列;

(3) 若数列 $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ 中任意一项的值均未在该数列中重复出现无数次, 求首项 a_1 应满足的条件.