中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 9 月测试

理科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x<0\}$，$B=\{x|x\geq a\}$，$A\subseteq B$，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,3]$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $a^2-1+(a-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数（i 是虚数单位），则 $a=$

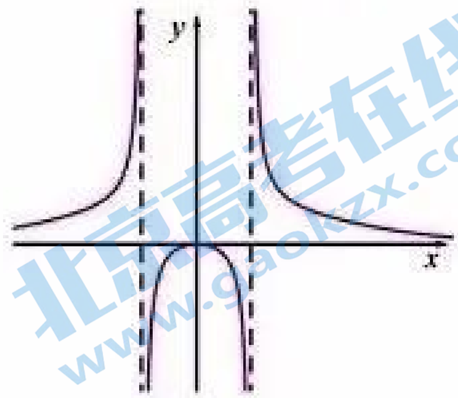
A. -1 或 1　　B. 0　　C. -1　　D. 0 或 1

3. 已知空间中 a，b 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是

A. $a\perp\alpha,a\perp b\Rightarrow b\parallel\alpha$　　B. $a\perp\alpha,b\perp\alpha\Rightarrow a\parallel b$

C. $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha\parallel\beta\Rightarrow a$ 与 b 异面　　D. $\beta\perp\alpha,\alpha\cap\beta=b,a\perp b\Rightarrow a\perp\beta$

4. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则它的解析式可能是



（第 4 题图）

A. $f(x)=\dfrac{x}{3^{|x|}-3}$　　B. $f(x)=\dfrac{x^2}{3^{|x|}-3}$

C. $f(x)=\dfrac{x^2}{3^{x}-3}$　　D. $f(x)=\dfrac{x^2}{3^{|x|}+3}$

5. 若 $\tan\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值为

A. 3　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\dfrac{1}{3}$

6. 已知向量 $\vec{a}=(\sin^2\theta,\cos\theta)$，$\vec{b}=(1-\sin\theta,2\cos\theta)$，且 $\theta\in[0,\pi]$，则“$\vec{a}\parallel\vec{b}$”是“$\theta=\dfrac{\pi}{6}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 一个四棱锥的四个侧面中，钝角三角形最多有

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

8．已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x$ 向左平移 θ 个单位后为偶函数，其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$．则 θ 的值为

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

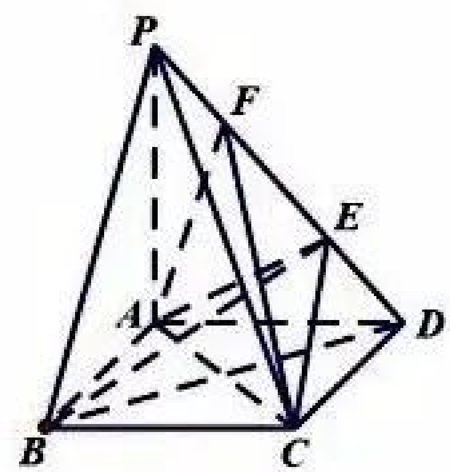
9．如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PA=AB=1$，E、F 为线段 PD 上的两个动点（不包括端点），且满足 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，以下结论正确的个数是

（1）$AC\perp EF$；

（2）PB // 平面 AEC；

（3）二面角 $E-BD-C$ 的大小为定值；

（4）四面体 $ACEF$ 的体积为定值．



（第 9 题图）

A．4个　　B．3个　　C．2个　　D．1个

10．已知椭圆和双曲线有相同的焦点 F_1、F_2，它们的离心率分别为 e_1、e_2，点 P 为它们的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，则 $e_1^2+e_2^2$ 的范围是

A．$\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　B．$\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(3,+\infty)$

11．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\perp\vec{b}$，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}|=1$，则 $|\vec{c}+\vec{b}|+2|\vec{c}+\vec{a}|$ 的最小值为

A．$\frac{\sqrt{15}}{2}$　　B．$\sqrt{15}$　　C．$\frac{\sqrt{17}}{2}$　　D．$\sqrt{17}$

12．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=3a_n-a_n^2-1$，则下列说法错误的是

A．若 $a\neq1$ 且 $a\neq2$，数列 $\{a_n\}$ 单调递减

B．若存在无数个自然数 n，使得 $a_{n+1}=a_n$，则 $a=1$

C．当 $a>2$ 或 $a<1$ 时，$\{a_n\}$ 的最小值不存在

D．当 $a=3$ 时，$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x+1)^2(2x-3)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_4=$________.

14. 随机变量 ξ 的分布列如下表所示，则方差 $D(\xi)$ 的取值范围是________.

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	a	b

15. 在平面直角坐标系中，$A(0,1)$，$B(0,2)$，若动点 C 在直线 $y=x$ 上，圆 M 过 A、B、C 三点，则圆 M 的面积最小值为________.

16. 已知 $a>b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$，则 $\frac{3}{a-2}+\frac{1}{b-4}$ 的最小值为________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

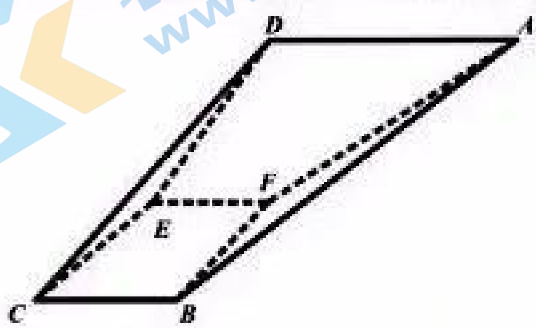
（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\cos C-\sqrt{3}\sin C=\frac{a-2c}{b}$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=2$，记 r 为 ΔABC 的内切圆半径，求 r 的最大值.

18.（12 分）如图所示，多面体 $ABCDEF$ 中，$AD\,//\,EF\,//\,BC$，平面 $ADEF\perp$ 平面 $BCEF$，$AD\perp EC$，且 $AD=CD=2$，$CB=EF=1$，$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$.



（第 18 题图）

（1）证明：$BF\perp DE$；

（2）若 $FB=\sqrt{2}$，求直线 DC 与平面 ABF 所成角的正弦值.

19.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_2=5$，$2S_n=2n+na_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

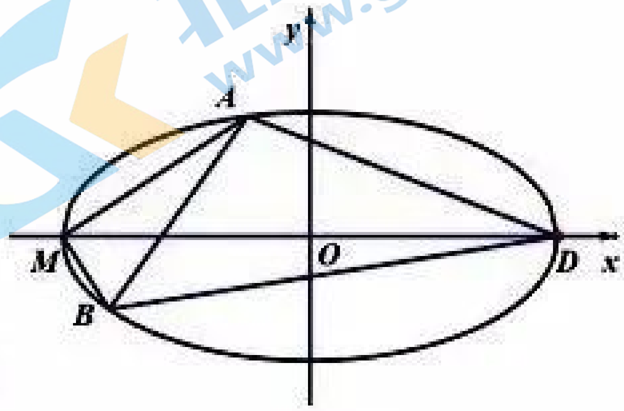
（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足$b_n=\dfrac{a_{n+1}^2}{(a_n+1)^2-1}$，且$c_n=b_1^n b_2^{n-1}\cdots b_{n-1}^2 b_n$，求证：$\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}<4$.

20.（12分）如图所示，M、D分别为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）过M点作两条互相垂直的直线MA，MB与椭圆交于A，B两点，求ΔDAB面积的最大值.



（第20题图）

21.（12分）已知函数$f(x)=e^x-ex$，$g(x)=2ax-a-1$，其中$a\in\mathbf{R}$，$e=2.71828\cdots$为自然对数的底数.

（1）求$f(x)$的最小值；

（2）设函数$h(x)=f'(x)-g(x)$（$f'(x)$为$f(x)$的导函数），如果函数$h(x)$在$(0,1)$内有两个不同的零点，求实数a的取值范围.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22.（10分）[选修4-4：坐标系与参数方程]

已知在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），直线$l$经过定点$P(2,1)$，倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$.

（1）写出直线l的参数方程和曲线C的标准方程；

（2）设直线l与曲线C相交于A，B两点，求$|PA|\cdot|PB|$的值.

23.（10分）[选修4-5：不等式选讲]

已知a，b，$c\in\mathbf{R}$，且$a^2+b^2+c^2=3$.

（1）求证：$|a+b+c|\le 3$；

（2）若不等式$|x-1|+|2x+1|\ge(a+b+c)^2$对一切实数a，b，c恒成立，求x的取值范围.

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 9 月测试

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	B	A	B	D	D	C	C	D	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-20　　14．$\left(\frac{2}{9},\frac{8}{9}\right)$　　15．$\frac{\pi}{2}$　　16．$\frac{1}{4}+\sqrt{3}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

（1）解：$\because \cos C-\sqrt{3}\sin C=\frac{a-2c}{b}$，$\therefore b\cos C-\sqrt{3}b\sin C=a-2c$，

根据正弦定理：$\sin B\cos C-\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin A-2\sin C$ ……………………2 分

所以 $\sin B\cos C-\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin(B+C)-2\sin C$，

则 $2\sin C-\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin(B+C)-\sin B\cos C=\cos B\sin C$ ……………………4 分

$\because \sin C\neq 0$，$\therefore 2-\sqrt{3}\sin B=\cos B$，$2=\sqrt{3}\sin B+\cos B=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$

所以 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$ ……………………6 分

（2）已知 r 为 ΔABC 内切圆半径，$\because B=\frac{\pi}{3}$，$b=2$

$\therefore b^2=4=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$，

$\because ac\leq\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，$\therefore 4\geq(a+c)^2-\frac{3}{4}(a+c)^2=\frac{1}{4}(a+c)^2$，

$\therefore a+c\leq 4$ ……………………8 分

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

又因为$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}(a+c+2)r$

$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{ac}{a+c+2}$ ……………………………………………………………10 分

$\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{ac}{a+c+2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3ac}{a+c+2}$

$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{(a+c)^2-4}{a+c+2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(a+c-2)\le\frac{\sqrt{3}}{3}$

当且仅当$a=c$，即ΔABC为等边三角形时，r取得最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………12 分

18.（12 分）

（1）证明：$\because EF\parallel BC$且$EF=BC$，所以四边形$EFBC$为平行四边形，

所以$BF\parallel EC$

又$AD\parallel EF$，$AD\perp EC$

$\therefore BF\perp EF$ ……………………………………………………………………………1 分

又平面$ADEF\perp$平面$BCEF$，且平面$ADEF\cap$平面$BCEF=EF$，

$\therefore BF\perp$平面$ADEF$ ……………………………………………………………………3 分

$\therefore FB\perp DE$ ………………………………………………………………………………5 分

（2）法一：连接BD,BF,DF

因为$CD=2CB=2$，$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$

所以$BD=\sqrt{3}$，

又$CD^2=CB^2+BD^2$，所以$BC\perp BD$，

因为$BC\perp BF$，且$BD\cap BF=B$

所以$BC\perp$平面BFD

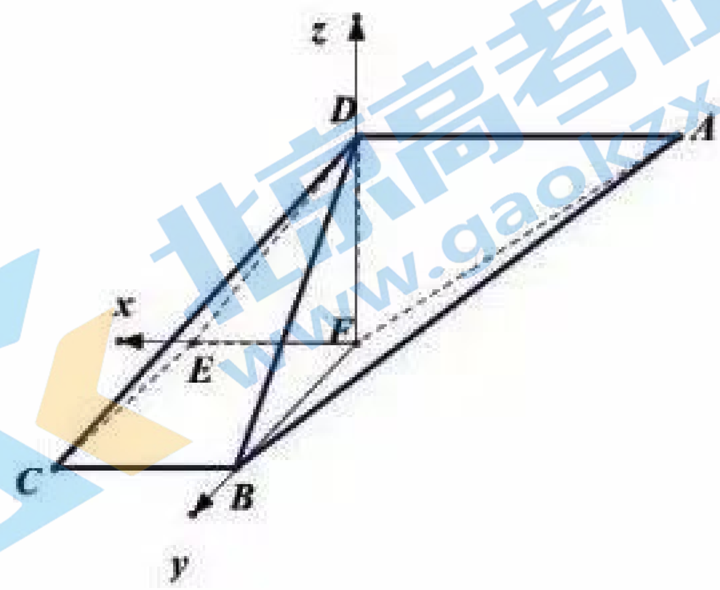
因为$EF\parallel BC$，所以$EF\perp$平面BFD ………………………………………………7 分

又因为$BF\perp$平面$ADEF$

所以$FD\perp FB$，

故FD，FE，FB两两垂直，

因为 $BD=\sqrt{3}$，$FB=\sqrt{2}$，所以 $FD=1$.



如图所示建系，$F(0,0,0)$，$A(-2,0,1)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，

$C(1,\sqrt{2},0)$，$D(0,0,1)$，

$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{FA}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{FB}=(0,\sqrt{2},0)$

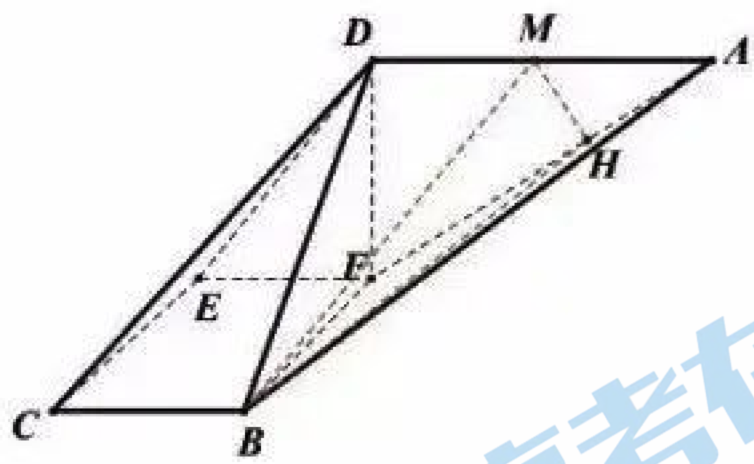
设平面 ABF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-2x+z=0\\ \sqrt{2}y=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,0,2)$ ······························ 10 分

直线 DC 与平面 ABF 所成角正弦值为：

$\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DC}>|=\left|\dfrac{1-2}{2\times\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. ······························ 12 分

法二：连接 BD,BF,DF



取 AD 中点 M，在平面 ADF 内作 $MH\perp FA$，

又 $BF\perp$ 平面$ADF\Rightarrow BF\perp MH$，

所以 $MH\perp$ 平面BFA，

又因为 $DM\,//\,CB$ 且 $DM=CB$

所以四边形 $DMBC$ 为平行四边形，$\therefore BM\,//\,CD$

故 $\angle MBH$ 就是直线 DC 与平面 ABF 所成角 ······························ 8 分

$\because MH=AM\cdot\sin\angle DAF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BM=CD=2$ ······························ 10 分

（或者 $\because BD\perp AD\therefore BM=\sqrt{BD^2+DM^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$）

$\therefore \sin\angle MBH=\dfrac{MH}{BM}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ······························ 11 分

所以直线 DC 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ······························ 12 分

19．（12 分）

（1）解：由题易知 $2S_n=2n+na_n$，$2S_{n-1}=2(n-1)+(n-1)a_{n-1}(n\ge2)$

两式相减得$(n-1)a_{n-1}-(n-2)a_n=2(n\geq 2)$

故$(n-2)a_{n-2}-(n-3)a_{n-1}=2(n\geq 3)$ ……2 分

两式相减得$2(n-2)a_{n-1}=(n-2)a_n+(n-2)a_{n-2}(n\geq 3)$

即$2a_{n-1}=a_n+a_{n-2}(n\geq 3)$ ……4 分

又$S_2=5$，故$a_1=2$，$a_2=3$，故$a_n=n+1(n\geq 3)$，

经检验$n=1,2$也符合通项，故$a_n=n+1(n\in \mathbf{N}^*)$ ……5 分

（2）由题易知$c_n=b_1^n b_2^{n-1}\cdots b_{n-1}^2 b_n$，$c_{n-1}=b_1^{n-1}b_2^{n-2}\cdots b_{n-2}^2 b_{n-1}(n\geq 2)$，

两式相除得$\dfrac{c_n}{c_{n-1}}=b_1b_2\cdots b_n(n\geq 2)$，

又因为$b_n=\dfrac{(n+2)^2}{(n+2)^2-1}=\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}$，

所以$\dfrac{c_n}{c_{n-1}}=b_1b_2\cdots b_n=\dfrac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}=\dfrac{3(n+2)}{2(n+3)}(n\geq 2)$ ……7 分

由累乘法可得：$\dfrac{c_2}{c_1}=\dfrac{3\cdot 4}{2\cdot 5},\dfrac{c_3}{c_2}=\dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 6},\cdots,\dfrac{c_n}{c_{n-1}}=\dfrac{3(n+2)}{2(n+3)}(n\geq 2)$

$\therefore \dfrac{c_n}{c_1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\dfrac{4}{n+3}(n\geq 2)$，

$\because c_1=b_1=\dfrac{9}{8}$，$\therefore c_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{3}{n+3}(n\geq 2)$

当$n=1$时，$c_1=\dfrac{9}{8}$也符合，$\therefore c_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{3}{n+3}(n\geq 1)$ ……9 分

则$\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n(n+3)$

令$d_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n(n+3)$，设数列$\{d_n\}$的前$n$项和为$T_n$

$T_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\times 4+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times 5+\cdots\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n(n+3)$

$\dfrac{2}{3}T_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times 4+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times 5+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot(n+3)$，

由错位相减法可得：$\frac{1}{3}T_n=\frac{8}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(n+3)$

$=\frac{8}{3}+\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{2}{3}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(n+3)=4-\left(\frac{2}{3}n+4\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ………………………… 11 分

所以 $T_n=12-(2n+12)\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

则 $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\cdots+\frac{1}{c_n}=4-\left(\frac{2}{3}n+4\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n<4$

即得 $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\cdots+\frac{1}{c_n}<4$ ………………………… 12 分

20.（12 分）

（1）解：由已知可得：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=1+c^2\end{cases}$，解得：$a=2$，$c=\sqrt{3}$

$\therefore$ 椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………………… 4 分

（2）$\because M(-2,0)$

设 AB 的直线方程为：$x=ty+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立方程：$\begin{cases}x=ty+m\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$

整理得：$(t^2+4)y^2+2mty+m^2-4=0$

$\therefore y_1+y_2=\frac{-2mt}{t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}$ ………………………… 6 分

$\because \angle AMB=\frac{\pi}{2}$，$(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2=0\Rightarrow x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$

$(ty_1+m)(ty_2+m)+2(ty_1+ty_2+2m)+4+y_1y_2=0$，

即 $(t^2+1)y_1y_2+(mt+2t)(y_1+y_2)+(m+2)^2=0$

$\Rightarrow(t^2+1)\cdot\frac{m^2-4}{t^2+4}+(mt+2t)\cdot\frac{-2mt}{t^2+4}+(m+2)^2=0$

$$\left(t^2+1\right)\left(m^2-4\right)-2m^2t^2-4mt^2+\left(m^2+4m+4\right)\left(t^2+4\right)=0$$

$$\left(t^2m^2-4t^2+m^2-4\right)-2m^2t^2-4mt^2+m^2t^2+4m^2+4mt^2+16m+4t^2+16=0$$

整理得 $5m^2+16m+12=0$，解得 $m=-\dfrac{6}{5}$ 或 $m=-2$（舍去）

$\therefore\ x=ty-\dfrac{6}{5}$ ……………………………………………………………………………

$$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{12t}{5\left(t^2+4\right)} \\ y_1y_2=\dfrac{-64}{25\left(t^2+4\right)} \end{cases}$$

$\therefore\ S_{\Delta DAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(2+\dfrac{6}{5}\right)\left|y_1-y_2\right|=\dfrac{8}{5}\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\dfrac{32}{25}\cdot\dfrac{\sqrt{25t^2+64}}{t^2+4}$ …………11 分

令 $\sqrt{25t^2+64}=u\left(u\geq 8\right)$，

$$S_{\Delta DAB}=\frac{32}{25}\cdot\frac{u}{\dfrac{u^2-64}{25}+4}=\frac{32u}{u^2+36}=\frac{32}{u+\dfrac{36}{u}}\leq\frac{32}{8+\dfrac{36}{8}}=\frac{64}{25}$$

当且仅当 $u=8$ 时，即 $t=0$ 时等号成立，

此时 $S_{\Delta DAB}$ 最大值为 $\dfrac{64}{25}$． …………………………………………………………12 分

21.（12 分）

（1）解：因为 $f'\left(x\right)=e^x-e$， ……………………………………………………1 分

当 $x\in\left[1,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)\geq 0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(-\infty,1\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减；

所以，$f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=0$，即 $f\left(x\right)$ 的最小值为 0． ………………………………3 分

（2）$h\left(x\right)=f'\left(x\right)-g\left(x\right)=e^x-2ax-e+a+1$，$h'\left(x\right)=e^x-2a$．

因为 $x\in\left(0,1\right)$，所以 $1<e^x<e$，即 $1-2a<e^x-2a<e-2a$

若 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 或 $a\geq\dfrac{e}{2}$ 时，函数 $h\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上单调，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上至多有一个零点，不符合题意，

所以 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{e}{2}$ ……………………………………………………………………5 分

当$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$，$\because h'(x)=e^x-2a$，

则$h(x)$在区间$(0,\ln 2a]$上单调递减，在区间$[\ln 2a,1)$上单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(\ln 2a)=3a-2a\ln(2a)-e+1$

如果$h(x)$在$(0,1)$上存在两个零点，则$h(0)>0$，$h(1)>0$且$h(x)_{\min}<0$.

由$\begin{cases}h(0)=2-e+a>0\\h(1)=-a+1>0\end{cases}$，得$\begin{cases}a>e-2\\a<1\end{cases}$，

又$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$，且$\frac{e}{2}>1, e-2>\frac{1}{2}$，所以$e-2<a<1$ ……………………………………8 分

下面证明$e-2<a<1$时，$h(x)_{\min}=h(\ln 2a)=3a-2a\ln(2a)-e+1<0$

令$m(a)=3a-2a\ln(2a)-e+1$，

则$m'(a)=1-2\ln 2a$，

当$\frac{\sqrt{e}}{2}<a<1$时，$m'(a)<0$，$m(a)$单调递减；

当$e-2<a\le\frac{\sqrt{e}}{2}$时，$m'(a)\ge 0$，$m(a)$单调递增；

所以$m(a)_{\max}=m\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}\ln\sqrt{e}-e+1=\sqrt{e}-e+1$

又因为$e<(e-1)^2$，所以$\sqrt{e}<e-1$，所以$\sqrt{e}-e+1<0$，

即$h(x)_{\min}<0$恒成立．因此，当$e-2<a<1$时，$h(x)$在$(0,1)$上有两个零点，

综上所述，$e-2<a<1$满足题意．……………………………………………………12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．（10 分）

（1）解：直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\y=1+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），……………………………2 分

曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ……………………………………………………4 分

（2）把直线 l 的参数方程代入 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得：$\frac{21}{4}t^2+\left(8\sqrt{3}+9\right)t-11=0$， ……………………………………7 分

又 $\Delta=\left(8\sqrt{3}+9\right)^2+11\times 21>0$，所以方程有两个不同的实根，

设 t_1,t_2 是方程的两个实根，则 $t_1\cdot t_2=-\frac{44}{21}$， ……………………………………9 分

所以 $|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=\frac{44}{21}$. ……………………………………10 分

23.（10 分）

（1）解：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\le 3+2\left(a^2+b^2+c^2\right)=9$ ……………………………………………………4 分

所以 $|a+b+c|\le 3$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立 ……………………………………5 分

（2）由（1）可知 $|x-1|+|2x+1|\ge(a+b+c)^2$ 对一切实数 a，b，c 恒成立，

等价于 $|x-1|+|2x+1|\ge 9$ ……………………………………………………7 分

令 $g(x)=|x-1|+|2x+1|=\begin{cases}3x,x\ge 1\\ x+2,-\frac{1}{2}<x<1\\ -3x,x\le -\frac{1}{2}\end{cases}$

当 $x\ge 1$ 时，$3x\ge 9\Rightarrow x\ge 3$，

当 $-\frac{1}{2}<x<1$ 时，$x+2\ge 9\Rightarrow x\ge 7$，舍去，

当 $x\le -\frac{1}{2}$ 时，$-3x\ge 9\Rightarrow x\le -3$，即 $x\ge 3$ 或 $x\le -3$.

综上所述，x 取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$. ……………………………………10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。