2024年高考数学仿真模拟卷(八)（新高考专用）

解析

(时间：120 分钟　满分：150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.答案　A

解析　$\because M=\{x|x+1\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant -1\}$，$N=\{x|2^x<1\}=\{x|x<0\}$，$\therefore M\cap N=\{x|-1\leqslant x<0\}$，由 Venn 图知，A 符合要求．

2.答案　B

解析　$(1-\mathrm{i})^2=1+\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}=-2\mathrm{i}$，$(1-\mathrm{i})^4=(-2\mathrm{i})^2=-4$，$\therefore z\cdot(1-\mathrm{i})^4=-4z=4+4\mathrm{i}$，$z=-1-\mathrm{i}$，$\overline{z}=-1+\mathrm{i}$.

3.答案　B

解析　由题设$\mu=2$，而 $P(0<X\leqslant 4)=P(0<X\leqslant 2)+P(2<X\leqslant 4)$，

又 $P(0<X\leqslant 2)=P(2<X\leqslant 4)=P(X\leqslant 4)-P(X\leqslant 2)=0.34$，所以 $P(0<X\leqslant 4)=0.68$.

4.答案　C

解析　当 $l\perp m$ 时，由 $l\subset\alpha$，$\alpha\perp\beta$且$\alpha\cap\beta=m$，得 $l\perp\beta$；

当 $l\perp\beta$时，因为$\alpha\cap\beta=m$，所以 $m\subset\beta$，所以 $l\perp m$.

即“$l\perp m$”是“$l\perp\beta$”的充要条件．

5.答案　C

解析　$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=-1$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$\therefore|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}.\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta\in[0,\pi]$，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为θ，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

6.答案　D

解析　由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{4\omega}\leqslant x\leqslant\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{5\pi}{4\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即函数的单调递减区间为$\left[\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{4\omega},\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{5\pi}{4\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

令 $k=0$，则函数 $f(x)$的一个单调递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{4\omega},\dfrac{5\pi}{4\omega}\right]$，函数 $f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减，

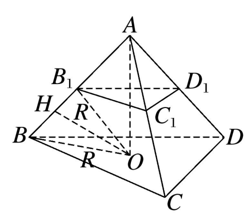
则满足$\begin{cases}\dfrac{5\pi}{4\omega}\geqslant\pi,\\ \dfrac{\pi}{4\omega}\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$得$\begin{cases}\omega\leqslant\dfrac{5}{4},\\ \omega\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$所以$\omega$的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right]$.

7.答案　D

解析　由题意得球 O 的球心为底面$\triangle BCD$ 的中心，设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 a，

如图所示．球 O 的半径 $R=\sqrt{3}$，

所以 $OB=R=\dfrac{2}{3}\times\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$，解得 $a=3$，



由于 $OA\perp OB$，所以 $OA=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$，

在 Rt$\triangle ABO$ 中，过 O 作 AB 的垂线 OH，

则 $\frac{1}{2}OH\cdot AB=\frac{1}{2}OB\cdot OA$，则 $OH=\frac{OB\cdot OA}{AB}=\sqrt{2}$，

利用勾股定理 $BH^2+OH^2=OB^2$，得 $BH^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$，所以 $BH=1$，同理 $B_1H=1$，所以 $BB_1=2$，$B_1O=\sqrt{3}$，

因为$\frac{BB_1}{AB}=\frac{2}{3}$，$\frac{AB_1}{AB}=\frac{1}{3}$，

所以$\frac{V_{三棱锥A-B_1C_1D_1}}{V_{三棱锥A-BCD}}=\frac{1}{27}$，多面体 $B_1C_1D_1-BCD$ 的体积 $V_{多面体BCD-B_1C_1D_1}=\frac{26}{27}V_{三棱锥A-BCD}=\frac{26}{27}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 9\times\sqrt{6}=\frac{13\sqrt{2}}{6}$.

8.答案　D

解析　因为函数 $g(x)=[f(x)]^2-(m+2)f(x)+2m$ 恰有 5 个零点，

所以方程$[f(x)]^2-(m+2)f(x)+2m=0$ 有 5 个根，所以$[f(x)-m][f(x)-2]=0$ 有 5 个根，

所以方程 $f(x)=2$ 和 $f(x)=m$ 共有 5 个根；

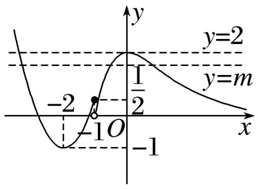
当 $x>-1$ 时，$f(x)=\frac{2(x+1)}{e^x}$，$f'(x)=\frac{2e^x-2(x+1)e^x}{e^{2x}}=\frac{-2x}{e^x}$，

当$-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递增；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减；

因为 $x>-1$，所以 $f(x)>0$，

$f(0)=2$，当 $x>-1$ 且 $x\to-1$ 时，$f(x)\to 0$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to 0$，

当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)=\frac{3}{2}x^2+6x+5=\frac{3}{2}(x+2)^2-1$，$f(-1)=\frac{1}{2}$，



故函数 $f(x)$在$(-\infty，-1]$上的图象是对称轴为 $x=-2$，

顶点为$(-2，-1)$的抛物线的一段，

根据以上信息，作出函数 $f(x)$的图象如下.

观察图象可得函数 $y=f(x)$的图象与函数 $y=2$ 的图象有 2 个交点，所以方程 $f(x)=2$ 有两个根，

所以方程 $f(x)=m$ 有 3 个异于方程 $f(x)=2$ 的根，

观察图象可得$\frac{1}{2}<m<2$，所以 m 的取值范围为$\left[\frac{1}{2}，2\right)$.

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案　AC

解析　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$，

对于 A，因为$\{a_n\}$是等差数列，且 $3+7=4+6$，则由等差数列性质可得 $a_3+a_7=a_4+a_6$，故 A 正确；

对于 B，$a_4\cdot a_6-a_3\cdot a_7=(a_1+3d)\cdot(a_1+5d)-(a_1+2d)\cdot(a_1+6d)=3d^2>0$，则 $a_3\cdot a_7<a_4\cdot a_6$，故 B 错误；

对于 C，因为 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=2d$，则数列$\{a_{2n+1}\}$是等差数列，故 C 正确；

对于 D，如数列$\{a_n\}$为 1,2,3,4,5,6，…，显然数列$\{a_{2n}\}$不是等比数列，故 D 错误.

10.答案　ACD

解析　对于 A，因为 $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$，

$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{4}{5}$，$P(A\cup\overline{B})=\frac{7}{15}$，所以 $P(A\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cup\overline{B})=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{7}{15}=\frac{1}{15}$，所以 A 正确；

对于 B，因为 $P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)$，所以 $P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$，所以 B 错误；

对于 C，因为 $P(\overline{B})=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})$，

所以 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$，

所以 $P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$，$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$，所以 $P(\overline{B}|A)=P(\overline{B}|\overline{A})$，所以 C 正确；

对于 D，因为 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$，

所以 $\frac{4}{5}=\frac{4}{15}+P(\overline{A}B)$，所以 $P(\overline{A}B)=\frac{8}{15}$，所以 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{3}{5}$，所以 D 正确.

11.答案　AC

解析　对于 A，由 $f(x)g(-x)=4$，得 $f(-x-2)g(x+2)=4$，又 $f(x)g(x+2)=4$，

所以 $f(-x-2)=f(x)$，$f(x)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称，A 选项正确；

对于 B，由 $f(x)$的图象关于点$(0,2)$对称，得 $f(-x)+f(x)=4$，由 A 选项结论知 $f(x-2)=f(-x)$，所以 $f(x-2)+f(x)=4$，

从而 $f(x-4)+f(x-2)=4$，故 $f(x)=f(x-4)$，即 $f(x)$的一个周期为 4，

因为 $f(0)=2$，$f(1)+f(3)=f(1)+f(-1)=4$，$f(2)=4-f(-2)=4-f(0)=2$，

所以 $\sum_{k=0}^{2023}f(k)=506[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]=4\,048$，B 错误；

对于 C，由 $f(x)=f(x+4)$，及 $f(x)g(-x)=4$，

则 $f(x+4)g(-x-4)=4$，得 $g(-x)=g(-x-4)$，函数 $g(x)$的一个周期为 4，C 正确；

对于 D，取 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x+2$，$g(-x)=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{2}x+2}$，又 $g(-1)+g(1)=\frac{16}{3}$，与 $g(x)$的图象关于点$(0,2)$对称矛盾，D 错误.

12.答案　ABD

解析　由题知，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设 $B(a，t)(a>0)$，则 $A(-a，t)$，

对于 A，根据椭圆的定义，

$|F_1A|+|F_1B|=\sqrt{(-a+2)^2+t^2}+\sqrt{(a+2)^2+t^2}=\sqrt{(a-2)^2+t^2}+\sqrt{(a+2)^2+t^2}=|F_2B|+|F_1B|=4\sqrt{2}$，故 A 正确；

对于 B，$\overrightarrow{AF_1}=(-2+a，-t)$，$\overrightarrow{BF_1}=(-2-a，-t)$，故 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}=4-a^2+t^2=0$，

因为$\frac{a^2}{8}+\frac{t^2}{4}=1$，即 $a^2=8-2t^2$，所以 $4-a^2+t^2=3t^2-4=0$，解得 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 B 正确；

对于 C，因为 $1=\frac{a^2}{8}+\frac{t^2}{4}\geqslant2\sqrt{\frac{a^2}{8}\cdot\frac{t^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}at$，当且仅当$\frac{a^2}{8}=\frac{t^2}{4}=\frac{1}{2}$，

即 $a=2$，$t=\sqrt{2}$时等号成立，即 $at\leqslant 2\sqrt{2}$，

所以$\triangle ABF_1$面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot t=at\leqslant 2\sqrt{2}$，即 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$，故 C 错误；

对于 D，$\overrightarrow{AF_1}=(-2+a,\ -t)$，$\overrightarrow{AF_2}=(2+a,\ -t)$，所以$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=a^2+t^2-4$，

因为$|\overrightarrow{AF_1}|=\sqrt{(-2+a)^2+t^2}$，$|\overrightarrow{AF_2}|=\sqrt{(2+a)^2+t^2}$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{AF_2}\rangle=\frac{a^2+t^2-4}{\sqrt{(-2+a)^2+t^2}\cdot\sqrt{(2+a)^2+t^2}}$，

由点 $B(a,\ t)$在椭圆 C 上得 $t^2=4-\frac{1}{2}a^2$，又$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AF_1},\overrightarrow{AF_2}\rangle=\frac{a^2+4-\frac{1}{2}a^2-4}{\sqrt{(-2+a)^2+4-\frac{1}{2}a^2}\cdot\sqrt{(2+a)^2+4-\frac{1}{2}a^2}}=\frac{1}{2}$，整理得 $3a^4+32a^2-256=0$，

即$(3a^2-16)(a^2+16)=0$，解得 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$\triangle ABF_1$的面积为 $S=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{8}{3}$，故 D 正确.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．答案　-10

解析　在$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2(1+x)^4$的展开式中，$(1+x)^4$的通项公式为 $T_{k+1}=C_4^k\cdot x^k(k=0,1,2,3,4)$，$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$.

则在$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2(1+x)^4$的展开式中含 x^2 项的系数为 $C_4^0+C_4^4-2C_4^2=-10$.

14.答案　$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

解析　$\because$半径为 $R=2$ 的半圆弧长为 $l=\frac{1}{2}\times 4\times\pi=2\pi$，$\therefore$圆周的底面周长为 2π，

$\therefore$扇形围成的底面圆周的半径为 $r=1$，母线长为 2，$h=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

故圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

15.答案　$\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

解析　$\because f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore f(\alpha)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{5}$，$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，

又$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$，$\therefore\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$，

$\because\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right]$，$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$，

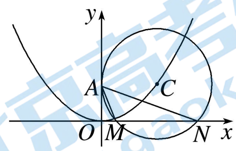
$\therefore\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

16.答案　$[2,2\sqrt{2}]$

解析　设 $C\left(x_0,\ \frac{x_0^2}{2p}\right)$，则$|AC|=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0^2}{2p}-p\right)^2}$，故圆 C 的方程$(x-x_0)^2+\left(y-\frac{x_0^2}{2p}\right)^2=x_0^2+\left(\frac{x_0^2}{2p}-p\right)^2$，

令 $y=0$ 有 $(x-x_0)^2+\dfrac{x_0^4}{4p^2}=x_0^2+\dfrac{x_0^4}{4p^2}-x_0^2+p^2$，故 $(x-x_0)^2=p^2$，解得 $x_1=x_0+p$，$x_2=x_0-p$，

故 $|MN|=|x_1-x_2|=2p$.



设 $\angle MAN=\theta$，因为 $S_{\triangle MAN}=\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|AN|\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|MN|=p^2$，所以 $mn=\dfrac{2p^2}{\sin\theta}$，

又由余弦定理可得 $m^2+n^2-2mn\cos\theta=4p^2$，

所以 $m^2+n^2=4p^2+\dfrac{4p^2}{\sin\theta}\cos\theta=4p^2\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$，

所以 $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}=\dfrac{4p^2\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)\sin\theta}{2p^2}=2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$，

因为 $0°<\theta\leqslant 90°$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(\theta+45°)\leqslant 1$，所以当且仅当 $\theta=45°$ 时，原式有最大值 $2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\theta=90°$ 时，原式有最小值为 2，从而 $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}$ 的取值范围为 $[2,2\sqrt{2}]$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．解　(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

当 $n=1$ 时，有 $a_2=a_1+2$，则 $a_1q=a_1+2$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$\begin{cases}a_{n+1}=S_n+2,\\ a_n=S_{n-1}+2,\end{cases}$　两式相减得 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$，

整理得 $a_{n+1}=2a_n$，可知 $q=2$，代入①可得 $a_1=2$，

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由已知在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，组成以 $a_n=2^n$ 为首项的等差数列，设公差为 d，

所以 $T_n=\dfrac{n(a_n+d+a_{n+1}-d)}{2}=\dfrac{n(2^n+2^{n+1})}{2}=\dfrac{3n\cdot 2^n}{2}=3n\cdot 2^{n-1}$，则 $(-1)^n\lambda<2-\dfrac{3n}{T_n}=2-\dfrac{2}{2^n}$，

设 $c_n=2-\dfrac{2}{2^n}$，则 $\{c_n\}$ 是递增数列，

当 n 为偶数时，$\lambda<2-\dfrac{2}{2^n}$ 恒成立，即 $\lambda<\left(2-\dfrac{2}{2^n}\right)_{\min}=c_2=\dfrac{3}{2}$，所以 $\lambda<\dfrac{3}{2}$；

当 n 为奇数时，$-\lambda<2-\dfrac{2}{2^n}$ 恒成立，即 $-\lambda<\left(2-\dfrac{2}{2^n}\right)_{\min}=c_1=1$，所以 $\lambda>-1$；

综上所述，λ 的取值范围是 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$.

18．解　(1)$\because 2b\cos C=2a-c$，

$\therefore$ 由正弦定理得，$2\sin B\cos C=2\sin A-\sin C$，即 $2\sin B\cos C=2\sin(B+C)-\sin C$，

即 $2\sin B\cos C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin C$，即 $2\cos B\sin C=\sin C$，

$\because C\in(0,\ \pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$，$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\ \pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{1}{2}ac\sin B=10\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{2}a\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\Rightarrow a=8$，

$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{64+25-2\times 8\times 5\times\frac{1}{2}}=7$.

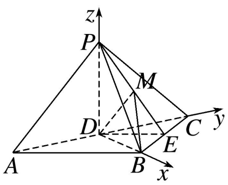
在△ABD 中，由正弦定理得，$\frac{AB}{\sin\angle BDA}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}\Rightarrow\sin\angle BAD=\frac{BD\cdot\sin\angle BDA}{AB}$，

在△ACD 中，由正弦定理得，$\frac{AC}{\sin\angle CDA}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}\Rightarrow\sin\angle CAD=\frac{CD\cdot\sin\angle CDA}{AC}$，

$\because BD=CD$，$\sin\angle BDA=\sin\angle CDA$，$\therefore\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}=\frac{7}{5}$.

19．解　(1)因为 $PD\perp$平面 ABC，$DB\subset$平面 ABC，$DC\subset$平面 ABC，则 $PD\perp DB$，$PD\perp DC$，

又由题可知 $DB\perp DC$，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图，



则 $B(\sqrt{2}, 0,0)$，$D(0,0,0)$，$C(0,\sqrt{2}, 0)$，$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$，

设 $P(0,0, t)(t>0)$，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PE}(0<\lambda<1)$.

则$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{2}, 0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2}, 0, -t)$，$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{2}, -t)$，$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -t\right)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0, t)$.

故$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{PE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, (1-\lambda)t\right)$.

设平面 MBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}_1=\sqrt{2}x_1=0,\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda y_1+(1-\lambda)tz_1=0,\end{cases}$　　令 $y_1=1$，可得 $\boldsymbol{n}_1=\left(0, 1, \frac{\sqrt{2}\lambda}{2(\lambda-1)t}\right)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}_2=\sqrt{2}x_2-tz_2=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}_2=\sqrt{2}y_2-tz_2=0,\end{cases}$　　令 $x_2=y_2=1$，可得 $\boldsymbol{n}_2=\left(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{t}\right)$，

要使平面 $MBD\perp$平面 PBC，需满足 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=1+\frac{2\lambda}{2(\lambda-1)t^2}=0\Rightarrow\lambda=\frac{t^2}{t^2+1}$.

注意到条件①⇔$t=\sqrt{2}$，

$PD\perp$平面 ABC，$DE\subset$平面 ABC，$PD\perp DE$，又由题可知 $DE=1$，则条件②⇔$t=\sqrt{3}$，

条件③⇔$\lambda=\frac{3}{4}$，条件④⇔$\lambda=\frac{2}{3}$.

则当条件①④成立或条件②③成立时，都有$\lambda=\frac{t^2}{t^2+1}$，即可以使平面 $MBD\perp$平面 PBC.

(2)由(1)知，当选择①④时，$t=\sqrt{2}$，$P(0,0, \sqrt{2})$，$\lambda=\frac{2}{3}$.则$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$，

平面 MBD 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(0, 1, \frac{\sqrt{2}\lambda}{2(\lambda-1)t}\right)=(0,1, -1)$，

设 BP 与平面 MBD 所成的角为θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$;

当选择②③时，$t=\sqrt{3}$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$\lambda=\frac{3}{4}$.则$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{3})$，

平面 MBD 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(0,1,\frac{\sqrt{2}\lambda}{2(\lambda-1)t}\right)=\left(0,1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

设 BP 与平面 MBD 所成的角为θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{5}$.

20．**解** (1)记“一局游戏后甲被扣除 2 个积分”为事件 A，“一局游戏后乙被扣除 n 个积分”为事件 B，

由题可知 $P(A)=\frac{C_2^1C_3^1A_2^2}{A_5^2}=\frac{3}{5}$，则 $P(B)=1-P(A)=\frac{2}{5}$，

当三局均为甲被扣除 2 个积分时，$\xi=-6$，

当两局为甲被扣除 2 个积分，一局为乙被扣除 n 个积分时，$\xi=n-4$，

当一局为甲被扣除 2 个积分，两局为乙被扣除 n 个积分时，$\xi=2n-2$，

当三局均为乙被扣除 n 个积分时，$\xi=3n$，

所以 $P(\xi=-6)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=n-4)=C_3^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$，

$P(\xi=2n-2)=C_3^1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$，$P(\xi=3n)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$，

所以随机变量ξ的分布列为

ξ	-6	$n-4$	$2n-2$	$3n$
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

(2)①由(1)易得 $E(\xi)=(-6)\cdot\frac{27}{125}+(n-4)\cdot\frac{54}{125}+(2n-2)\cdot\frac{36}{125}+3n\cdot\frac{8}{125}=\frac{6n-18}{5}$，

显然甲、乙双方的积分之和恒为零，

当游戏规则对甲获得“购书券”奖励更为有利时，则需 $E(\xi)=\frac{6n-18}{5}>0$，

所以 $n>3$，即正整数 n 的最小值 $n_0=4$.

②当 $n=4$ 时，记“甲至少有一局被扣除积分”为事件 C，则 $P(C)=1-\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{117}{125}$，

由题设可知若甲获得“购书券”奖励，则甲被扣除积分的局数至多为 1，

记“甲获得‘购书券’奖励”为事件 D，易知事件 CD 为“甲恰好有一局被扣除积分”，

则 $P(CD)=C_3^1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$，所以 $P(D|C)=\frac{P(CD)}{P(C)}=\frac{4}{13}$，

即在甲至少有一局被扣除积分的情况下，甲仍获得“购书券”奖励的概率为$\frac{4}{13}$.

21．(1)**解**　设双曲线 C 的焦距为 $2c$，其中 $c^2=a^2+b^2$，则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$H(1,0)$，

所以$\overrightarrow{HF_1}=(-c-1,0)$，$\overrightarrow{HF_2}=(c-1,0)$，

由$\overrightarrow{HF_1}+3\overrightarrow{HF_2}=\mathbf{0}$，有$-c-1+3(c-1)=0$，得 $c=2$，所以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，有 $T\left(1,\ \frac{b}{a}\right)$，所以$\overrightarrow{TF_1}=\left(-3,\ -\frac{b}{a}\right)$，$\overrightarrow{TF_2}=\left(1,\ -\frac{b}{a}\right)$，

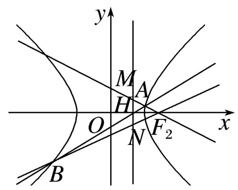
由$\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}=-2$，有$-3+\frac{b^2}{a^2}=-2$，即$-3+\frac{4-a^2}{a^2}=-2$，得 $a^2=2$，

所以 $b^2=c^2-a^2=2$，

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明**　设 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$得$(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-2=0$，



所以 $1-k^2\neq0$，$\Delta=4k^4-4(1-k^2)(-k^2-2)>0$，

$x_1+x_2=\frac{2k^2}{k^2-1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{k^2+2}{k^2-1}$，

所以 $k_{AF_2}+k_{BF_2}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-2}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-2}=k\cdot\frac{2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\frac{k}{(x_1-2)(x_2-2)}\left[2\times\frac{k^2+2}{k^2-1}-3\times\frac{2k^2}{k^2-1}+4\right]=0$，

所以 $k_{BF_2}=-k_{AF_2}$，即$\angle MF_2H=\angle NF_2H$，即 HF_2 平分$\angle MF_2N$，

因为 $MN\perp HF_2$，所以点 H 为 MN 的中点，

所以$|HM|=|HN|$.

22．(1)**解**　当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=x^2-x-\ln x$，定义域为$(0,\ +\infty)$.

$f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$.

由 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,\ +\infty)$.

(2)①**解**　若函数 $f(x)$在定义域内有两个零点 x_1，x_2，

则方程 $ax^2-x-\ln x=0$ 有两个不相等的实根．即方程 $a=\frac{x+\ln x}{x^2}$有两个不相等的实根．

记 $g(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-x-2\ln x}{x^3}$，

记 $m(x)=1-x-2\ln x(x>0)$，则 $m(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递减，且 $m(1)=0$，

∴当 $0<x<1$ 时，$m(x)>0$，$g'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$m(x)<0$，$g'(x)<0$，

∴$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$单调递减.

∴$g(x)_{max}=g(1)=1$.

又∵$g\left(\frac{1}{e}\right)<0$ 且当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，

∴当方程 $g(x)=a$ 有两个不相等的实根时，$0<a<1$.

∴当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$在定义域内有两个零点 x_1，x_2.

②**证明** 要证 $f(x_1+x_2)>2-\ln(x_1+x_2)$，

只需证 $a(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-\ln(x_1+x_2)>2-\ln(x_1+x_2)$，

只需证 $a(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)>2$，

∵$ax_1^2-x_1-\ln x_1=0$，$ax_2^2-x_2-\ln x_2=0$，两式相减得

$a(x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2)-(\ln x_1-\ln x_2)=0$.

整理得 $a(x_1+x_2)=1+\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

∴只需证$\left(1+\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\right)(x_1+x_2)-(x_1+x_2)>2$，

即证$\left(\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\right)(x_1+x_2)>2$，

即$\frac{\frac{x_1}{x_2}+1}{\frac{x_1}{x_2}-1}\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}>2$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，令 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，

只需证$\frac{t+1}{t-1}\cdot\ln t>2$，

只需证$(t+1)\ln t-2(t-1)<0$，

设 $n(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)$，

只需证当 $0<t<1$ 时，$n(t)<0$ 即可.

∵$n'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，令 $h(t)=n'(t)$，

则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}<0(0<t<1)$，

∴$n'(t)$在$(0,1)$上单调递减，

∴当 $0<t<1$ 时，$n'(t)>n'(1)=0$，

∴$n(t)$在$(0,1)$上单调递增，当 $0<t<1$ 时，$n(t)<n(1)=0$，

∴原不等式得证.