2022 北京首都师大附中高二（上）期中

数　　学

一、选择题（每题 5 分）

1. 直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

2. 圆心 $(1,-2)$，半径为 3 的圆的方程是（　　）

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$　　B. $(x-1)^2+(y+2)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2=3$　　D. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

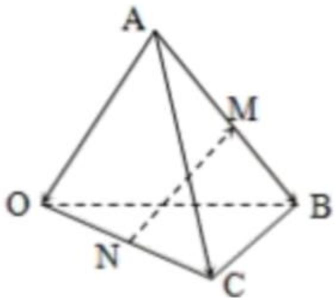
3. 已知直线方程 $2x-y+c=0$ 的一个法向量 $\vec{d}$ 可以是（　　）

A. $2,-1$　　B. $(2,1)$　　C. $(-1,-2)$　　D. $1,-2$

4. 点(3，0)到直线 $x+\sqrt{3}y-4=0$ 距离等于（　　）

A. 4　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 三棱锥 $O-ABC$ 中，M、N 分别是 AB、OC 的中点，且 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{NM}$，则 $\overrightarrow{NM}$ 等于（　　）



A. $\dfrac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$　　B. $\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)$

C. $\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$　　D. $\dfrac{1}{2}\left(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$

6. 已知直线 $ax+2y+2=0$ 与 $3x-y-2=0$ 平行，则系数 $a=$（　　）

A. -3　　B. -6　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

7. 直线 $l:3x+y-6=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-2y-4=0$ 的位置关系为（　　）

A. 相切　　B. 相交但直线不过圆心

C. 相交且直线过圆心　　D. 相离

8. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$是平面α内的两个不相等的非零向量，非零向量$\vec{c}$在直线l上，则“$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，且$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$”是$l\perp\alpha$的（　　）

A　充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 点M在圆$x^2+y^2=2$上，点N在直线$l:y=x-3$上，则$|MN|$的最小值是（　　）

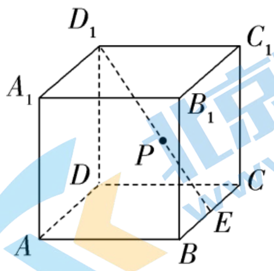
A. $\sqrt{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 1

10. 如图，在棱长为2的正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，E为BC的中点，点P在线段D_1E上，点P到直线CC_1的距离的最小值为（　　）



A. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

D. $\dfrac{3}{10}\sqrt{5}$

二、填空题（每题5分）

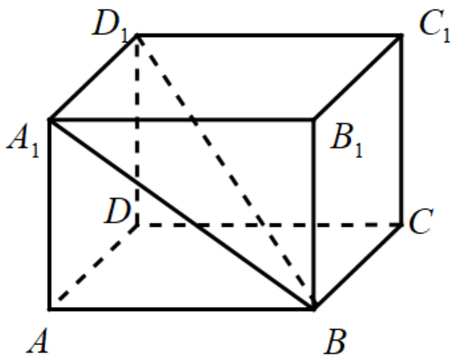
11. 圆$x^2+y^2-4x+2y+2=0$的圆心坐标为______，半径为_______

12. 过点$(1,1)$且方向向量为$\vec{v}=(1,-2)$的直线方程是__________.

13. 已知两条直线$l_1:(3+m)x+4y+3m-5=0$，$l_2:2x+(5+m)y-8=0$，若$l_1\perp l_2$，则m的值为___________.

14. 已知向量$\vec{a}=(-1,2,1)$，$\vec{b}=(2,-2,0)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为________.

15. 如图，已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$A_1A=5$，$AB=12$，则点C_1到平面A_1BD_1的距离为__________.



16. 已知矩形 $ABCD, AB=1, AD=2$，沿 BD 将 $\triangle ABD$ 折起成 $\triangle A'BD$，若点 A' 在平面 BCD 上的射影落在 $\triangle BCD$ 的内部（包括边界），则四面体 $A'-BCD$ 的体积的最大值为_________，最小值为_________.

三、解答题（每题 14 分）

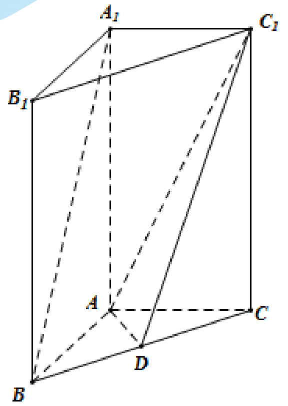
17. 已知△ABC 三个顶点是 A（3，3），$B(-3,1)$，$C(2,0)$.

（1）求 AB 边中线 CD 所在直线方程；

（2）求 AB 边的垂直平分线的方程；

（3）求 $\triangle ABC$ 的面积

18. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AB=AC=2$，$AA_1=4$，点 D 是 BC 中点.



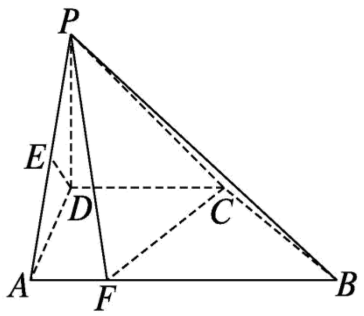
（1）求异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值；

（2）求平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成角的余弦值.

19. （1）求过点（2，0）且圆心为（1，0）的圆的方程：

（2）过点(2，5)作（1）中圆的切线，求出切线方程.

20. 在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PD\perp$平面 $ABCD$，AB // DC，$AB\perp AD$，DC=AD=1，AB=2，$\angle PAD$=45°，E 是 PA 中点，F 在线段 AB 上，且满足 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DB}$=0.

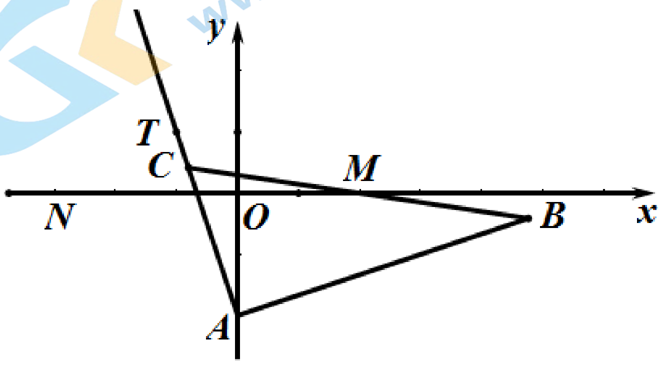


（1）求证:DE∥平面 PBC.

（2）求二面角 F-PC-B　余弦值.

（3）在线段 PA 上是否存在点 Q，使得 FQ 与平面 PFC 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，求出 AQ 的长;若不存在，请说明理由.

21. 如图，$\triangle ABC$ 的边 AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$，$M\left(2,0\right)$ 满足 $2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$，点 $T\left(-1,1\right)$ 在 AC 边所在直线上且满足 $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.



（1）求 AC 边所在直线的方程;

（2）求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程;

（3）若点 N　坐标为 $\left(-n,0\right)$，其中 n 为正整数．试讨论在 $\triangle ABC$ 的外接圆上是否存在点 P，使得 $|PN|=|PT|$ 成立?说明理由．

参考答案

一、选择题

1. 【答案】A

【解析】【分析】首先将直线化为斜截式求出直线的斜率，然后再利用倾斜角与斜率的关系即可求解.

【详解】由直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$，

则 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设直线的倾斜角为 α，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：A

【点睛】本题考查了直线的斜截式方程、直线的倾斜角与斜率的关系，属于基础题.

2. 【答案】D

【解析】【分析】根据圆心坐标及半径，即可得到圆的方程.

【详解】因为圆心为 $(1,-2)$，半径为 3，

所以圆的方程为: $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

故选：D.

3. 【答案】A

【解析】【分析】根据题意求出直线的方向向量，由法向量的定义再逐个分析判断.

【详解】因为直线 $2x-y+c=0$ 的斜率为 2，

所以直线的一个方向向量为 $\vec{m}=(1,2)$，

对于 A，因为 $\vec{m}\cdot\vec{d}=1\times2+2\times(-1)=0$，所以 $\vec{d}=(2,-1)$ 为直线的一个法向量，所以 A 正确，

对于 B，因为 $\vec{m}\cdot\vec{d}=1\times2+2\times1=4\neq0$，所以 $\vec{d}=(2,1)$ 不是直线的法向量，所以 B 错误，

对于 C，因为 $\vec{m}\cdot\vec{d}=1\times(-1)+2\times(-2)=-5\neq0$，所以 $\vec{d}=(-1,-2)$ 不是直线的法向量，所以 C 错误，

对于 D，因为 $\vec{m}\cdot\vec{d}=1\times1+2\times(-2)=-3\neq0$，所以 $\vec{d}=(1,-2)$ 不是直线的法向量，所以 C 错误，

故选：A

4. 【答案】D

【解析】【分析】由点到直线的距离公式计算.

【详解】由题意所求距离为$d=\dfrac{|3+0-4|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{1}{2}$.

故选：D.

5.【答案】B

【解析】【分析】根据空间向量运算求得正确答案.

【详解】$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

故选：B

6.【答案】B

【解析】【分析】由直线的平行关系可得$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{2}{-2}$，解之可得.

【详解】解：$\because$直线$ax+2y+2=0$与直线$3x-y-2=0$平行，

$\therefore\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{2}{-2}$，解得$a=-6$.

故选：B.

7.【答案】B

【解析】

【分析】先求出圆心和半径，再求出圆心到直线的距离与半径比较可得结果.

详解】由$x^2+y^2-2y-4=0$，得$x^2+(y-1)^2=5$，

所以圆心$C(0,1)$，半径为$\sqrt{5}$，

因为圆心$C(0,1)$到直线$l:3x+y-6=0$的距离为

$d=\dfrac{|0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}<\sqrt{5}$，

所以直线与圆相交，

因为$C(0,1)$不在直线$l:3x+y-6=0$上，

所以直线与圆相交但直线不过圆心，

故选：B

8.【答案】B

【解析】【分析】由线面垂直的定义和判定定理即可得到答案.

【详解】由题意，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{c}\perp\vec{b}$.

若$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反，且$\vec{a}$，$\vec{b}$在平面α内，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$所在的直线要么重合，要么平行，因此根据线面垂直的判定定理，由$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，且$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$无法得到$l\perp\alpha$.

若$l\perp\alpha$，根据线面垂直的定义，可以得到$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，且$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$.

所以“$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，且$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$”是$l\perp\alpha$的必要不充分条件.

故选：B.

9. 【答案】B

【解析】【分析】根据题意可知圆心$M\left(0,0\right)$，又由于线外一点到已知直线的垂线段最短，结合点到直线的距离公式，即可求出结果.

【详解】由题意可知，圆心$M\left(0,0\right)$，

所以圆心$M\left(0,0\right)$到$l:y=x-3$的距离为$\dfrac{|-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以$|MN|$的最小值为

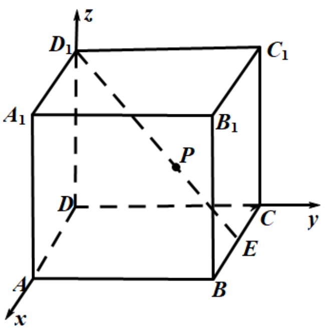
$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

10. 【答案】A

【解析】【分析】建立空间直角坐标系，将点P到直线CC_1的距离的最小值转化为异面直线D_1E与CC_1的距离，利用空间向量可求得结果.

【详解】以D为原点，DA,DC,DD_1分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，



则$E(1,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，

$\overrightarrow{ED_1}=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(1,0,0)$，

设$\vec{u}=(x,y,z)$，$\vec{u}\perp\overrightarrow{CC_1}$，$\vec{u}\perp\overrightarrow{ED_1}$，

则$\vec{u}\cdot\overrightarrow{CC_1}=(x,y,z)\cdot(0,0,2)=0$，$\therefore z=0$，

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{ED_1}=(x,y,z)\cdot(-1,-2,2)=-x-2y+2z=0$，$\therefore y=-\frac{1}{2}x$，

令 $x=1$，则 $y=-\frac{1}{2}$，$\therefore \boldsymbol{u}=(1,-\frac{1}{2},0)$，

$\therefore$异面直线 D_1E 与 CC_1 的距离为 $d=\frac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\vec{u}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+0}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\because P$ 在 D_1E 上运动，$\therefore P$ 到直线 CC_1 的距离的最小值为 $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：将点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值转化为为异面直线 D_1E 与 CC_1 的距离求解是解题关键.

二、填空题

11.【答案】 ①. $(2,-1)$ ②. $\sqrt{3}$

【解析】【分析】配方后可得圆心坐标和半径.

【详解】圆标准方程是 $(x-2)^2+(y+1)^2=3$，

圆心坐标为 $(2,-1)$，半径为 $\sqrt{3}$.

故答案为：$(2,-1)$；$\sqrt{3}$.

12.【答案】$2x+y-3=0$

【解析】【分析】根据直线的方向向量求出直线斜率，然后利用点斜式求出直线方程.

【详解】$\because$ 直线方程方向向量为 $\vec{v}=(1,-2)$ $\therefore$ 直线的斜率为 $k=-2$

$\because$ 直线过点 $(1,1)$，$\therefore$ 直线方程为 $y-1=-2(x-1)$，即 $2x+y-3=0$

故答案为：$2x+y-3=0$

13.【答案】$-\frac{13}{3}$

【解析】【分析】利用相互垂直的直线斜率之间的关系即可得出 m 的值.

【详解】当 $5+m=0$ 时，不满足 $l_1\perp l_2$，舍去；

当 $5+m\neq 0$ 时，直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{3+m}{4}$，l_2 的斜率 $k_2=-\frac{2}{5+m}$

$\because l_1\perp l_2$，

$\therefore k_1\cdot k_2=-\frac{3+m}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5+m}\right)=-1$，

解得 $m=-\frac{13}{3}$

故答案为：$-\frac{13}{3}$.

14.【答案】$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】【分析】根据向量投影的计算公式，计算出 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影.

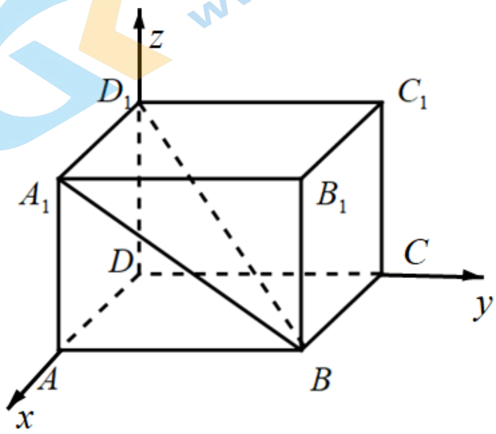
【详解】依题意 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-2-4}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{-6}{2\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本小题主要考查向量在另一个向量上的投影的计算，考查空间向量的数量积的坐标运算，属于基础题.

15.【答案】$\frac{60}{13}$

【解析】【分析】建立空间直角坐标系，求出平面 A_1BD_1 的法向量，根据空间向量中点到平面距离公式，即可求出结果.

【详解】以 D 为坐标原点 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,12,0),D_1(0,0,5),C_1(0,12,5)$.



设 $AD=x$，则 $A_1(x,0,5),B(x,12,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,12,5)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(-x,0,0)$

设平面 A_1BD_1 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$,则 $\vec{n}\perp\overrightarrow{A_1D_1},\vec{n}\perp\overrightarrow{A_1B}$,

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-ax=0\\ -12b+5c=0\end{cases}$，所以 $a=0,b=\frac{5}{12}c$，

可取 $\vec{n}=(0,5,12)$.

又 $\overrightarrow{C_1D_1}=(0,-12,0)$，

点 C_1 到平面 A_1BD_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{C_1D_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{60}{13}$，即点 C_1 到平面 A_1BD_1 的距离为 $\frac{60}{13}$.

故答案为：$\frac{60}{13}$.

16.【答案】 ①. $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$##$\dfrac{2}{15}\sqrt{5}$ ②. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

【解析】【分析】结合 A' 到平面 BCD 的距离的最大值和最小值来求得正确答案.

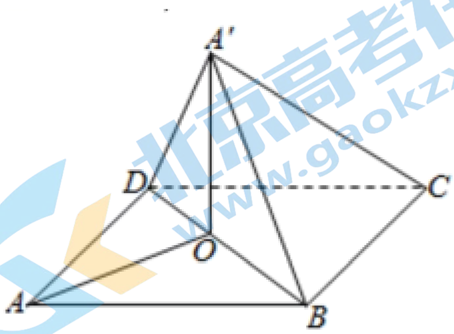
【详解】过 A' 作 $A'O\perp BD$，垂足为 O，

$$\frac{1}{2}\times 1\times 2=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times A'O, A'O=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

当 A' 在平面 BCD 上的投影在 BD 上时，A' 到平面 BCD 的距离最大，如下图所示，

此时平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，且交线为 BD，$A'O\subset$ 平面 $A'BD$，所以 $A'O\perp$ 平面 BCD，

所以四面体 $A'-BCD$ 体积的最大值为 $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\right)\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.



当 A' 在平面 BCD 上的投影 M 在 BC 上时，A' 到平面 BCD 的距离最小，

则 $A'M\perp$ 平面 BCD，由于 $OB\subset$ 平面 BCD，所以 $A'M\perp OB$，

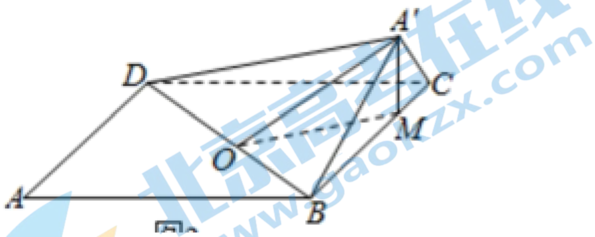
由于 $OB\perp A'O, A'O\cap A'M=A', A'O, A'M\subset$ 平面 $A'OM$，

所以 $BO\perp$ 平面 $A'OM$，由于 $OM\subset$ 平面 $A'OM$，所以 $BO\perp OM$，

$$OB=\sqrt{1^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad OM=OB\cdot\tan\angle CBD=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{5}},$$

$$A'M=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以四面体 $A'-BCD$ 的体积的最小值为 $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$；$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

【点睛】求解三棱锥体积的最值问题，要找准突破口，也即是按三棱锥的体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$，如果底面积固定（如本题），则通过找高的最值来进行求解.

三、解答题

17.【答案】（1）$x+y-2=0$

（2）$y=-3x+2$

（3）8

【解析】【分析】（1）求出AB中点D坐标后，由截距式写出直线方程并整理；

（2）求出AB的斜率，由垂直关系得垂直平分线的斜率，从而可得直线方程；

（3）求出C到直线AB的距离，再求得AB的长后可得三角形面积.

【小问1详解】

因为A（3，3），$B(-3,1)$，所以AB中点D的坐标为$(0,2)$，

CD方程为$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$，即$x+y-2=0$；

【小问2详解】

$k_{AB}=\frac{3-1}{3-(-3)}=\frac{1}{3}$，$AB$中垂线的斜率为$-3$，垂直平分线方程为$y=-3x+2$；

【小问3详解】

直线AB方程为$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-3}{-3-3}$，即$x-3y+6=0$，

点C到直线AB的距离为$d=\frac{|2-0+6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，

$|AB|=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=8$.

18.【答案】（1）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$；（2）$\frac{2}{3}$.

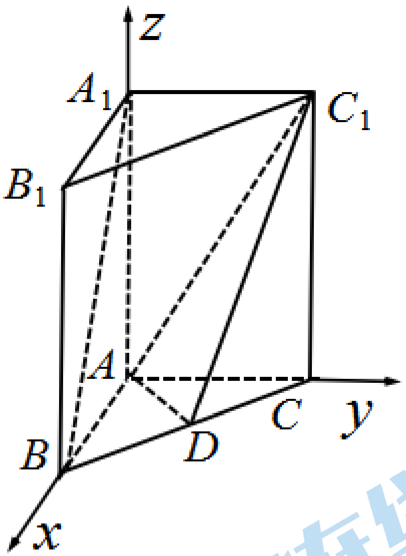
【解析】

【分析】以A为原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AA_1}$为x轴、y轴、z轴正方向建立空间直角坐标系，标记处各个点的坐标.

（1）表示出$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-4),\overrightarrow{C_1D}=(1,-1,-4)$，用向量法求异面直线$A_1B$与$C_1D$所成角的余弦值；

（2）用向量法求平面ADC_1与平面ABA_1所成角的余弦值.

【详解】



如图示：以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AA_1}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系

$A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,2,0), D(1,1,0), A_1(0,0,4), C_1(0,2,4)$.

（1）$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-4), \overrightarrow{C_1D}=(1,-1,-4)$ ，

所以异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值

$$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{C_1D}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB_1}\bullet\overrightarrow{C_1D}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\times\left|\overrightarrow{C_1D}\right|}=\frac{2+0+16}{\sqrt{4+16}\times\sqrt{1+1+16}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

（2）显然面 ABA_1 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$.

设面 ADC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AD}=(1,1,0), \overrightarrow{AC_1}=(0,2,4)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=2y+4z=0\end{cases}$，不妨取 y=-2，则 $\vec{n}=(2,-2,1)$

由图示，平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成角为锐角，所以

$$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\frac{|0-2+0|}{\sqrt{4+4+1}\times\sqrt{0+1+0}}=\frac{2}{3}$$

所以平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

19.【答案】(1) $(x-1)^2+y^2=1$；(2) $x=2$ 或 $12x-5y+1=0$.

【解析】【分析】（1）求出半径后可得圆标准方程；

（2）分类讨论．验证斜率不存在的直线是切线，斜率存在时设出直线方程，由圆心到切线距离等于半径求得参数值得切线方程.

【详解】（1）由已知圆半径为 $r=1$，所以圆方程为 $(x-1)^2+y^2=1$；

（2）易知直线 $x=2$ 与相切，

当切线斜率存在时，设切线方程是 $y=k(x-2)+5$，即 $kx-y-2k+5=0$，

由 $\frac{|k-2k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{12}{5}$，切线方程是 $\frac{12}{5}x-y+\frac{1}{5}=0$，即 $12x-5y+1=0$.

所以切线方程是 $x=2$ 或 $12x-5y+1=0$.

20.【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) 存在，$|AQ|=\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】【分析】(1) 取 PB 的中点 M，连接 EM 和 CM，证明四边形 $CDEM$ 为平行四边形即可得证；

(2) 以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$，分别求出平面 PBC 和 FPC 的法向量，结合向量夹角的余弦公式即可求解；

(3) 设存在点 Q，结合线面角的正弦值等于线与法向量夹角的余弦值的绝对值, 直接计算即可.

【小问 1 详解】

取 PB 的中点 M，连接 EM 和 CM，

$\because E$，M 分别为 PA，PB 的中点，$\therefore EM /\!/ AB$ 且 $EM=\frac{1}{2}AB$，

又 $CD /\!/ AB$ 且 $CD=\frac{1}{2}AB$，$\therefore EM /\!/ CD$ 且 $EM=CD$，$\therefore$ 四边形 $CDEM$ 为平行四边形，

$\therefore DE /\!/ CM$，又 $CM\subset$ 平面 PBC，$DE\not\subset$ 平面 BPC，$\therefore DE /\!/$ 平面 PBC；

【小问 2 详解】

由题意可得 DA，DC，DP 两两互相垂直，如图，以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$，则 $A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$E\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BC}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,1)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x-y=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $x=-1$，$z=1$，

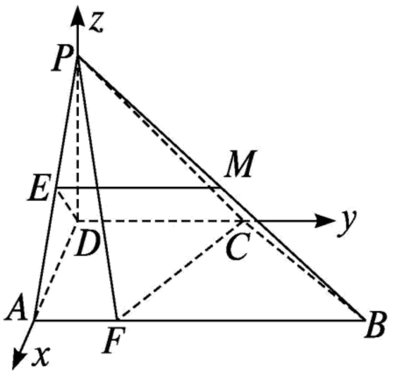
$\therefore \vec{m}=(-1,1,1)$.

设点 F 的坐标为 $(1,t,0)$，则 $\overrightarrow{CF}=(1,t-1,0)$，$\overrightarrow{DB}=(1,2,0)$，由 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，

得 $t=\frac{1}{2}$，$\therefore F\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ $\overrightarrow{CF}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，

设平面 FPC 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-b+c=0,\\ a-\frac{1}{2}b=0,\end{cases}$ 令 $a=1$，则 $b=2$，$c=2$，$\therefore \vec{n}=(1,2,2)$，

则 $\left|\cos\left\langle \vec{n},\vec{m}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}\right|=\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又由图可知，二面角 *F-PC-B* 为锐角，故该二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；



【小问 3 详解】

存在，由(2)知，可设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=(-\lambda,0,\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，

$\therefore\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AQ}=\left(-\lambda,-\frac{1}{2},\lambda\right)$，

$$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{FQ},\vec{n}\right\rangle=\frac{\lambda-1}{3\cdot\sqrt{2\lambda^2+\frac{1}{4}}}=\frac{2\lambda-2}{3\sqrt{8\lambda^2+1}}$$

$\because$ *FQ* 与平面 *PFC* 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$其正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\dfrac{|2\lambda-2|}{3\sqrt{8\lambda^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，整理得 $20\lambda^2+8\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{10}$，$\lambda=-\frac{1}{2}$(舍)，

$\therefore$存在满足条件的点 *Q*，$\overrightarrow{AQ}=\left(-\dfrac{1}{10},0,\dfrac{1}{10}\right)$，且 $|AQ|=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

21. 【答案】（1）$3x+y+2=0$；

（2）$(x-2)^2+y^2=8$；

（3）当 n=1 或 2 时，存在点 P，当 $n\geq3$ 时，不存在点 P.

【解析】【分析】（1）由又 *T* 在 *AC* 上且 $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，得 AC⊥AB，结合 T 点坐标及直线 AB 的斜率，可求出 AC 边所在直线的方程；（2）结合（1）中结论，直线 AB, AC 的方程联立，得点 A；由 B、C 两点关于 M 点对称，得△ABC 的外接圆是以 M 为圆心，以 AM 为半径的圆；（3）若在△ABC 的外接圆上存在点 P，使得|PN|=|PT|成立，则 P 为线段 NT 的垂直平分线 l 与圆 M 的公共点．所以当 l 与圆 M 相离时，不存在点 P；当 l 与圆 M 相交或相切时则存在点 P．设 N 点坐标，点 N 到直线距离 d 与半径 r=$2\sqrt{2}$ 比较，即可得到结论．

【小问 1 详解】

因为 $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以 $AT\perp AB$，又 *T* 在 *AC* 上，所以 $AC\perp AB$，$\triangle ABC$ 为 Rt$\triangle ABC$，

又 AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$，

所以直线 AC 的斜率为 -3.

又因为点 $T(-1,1)$ 在直线 AC 上，

所以 AC 边所在直线的方程为 $y-1=-3(x+1)$.

即 $3x+y+2=0$.

【小问 2 详解】

AC 与 AB 的交点为 A，

所以由 $\begin{cases}x-3y-6=0,\\3x+y+2=0\end{cases}$ 解得点 A 的坐标为 $(0,-2)$，

因为 $2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$，

所以 $M(2,0)$ 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中点，即为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 外接圆的圆心.

又 $r=|AM|=\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$.

从 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为：$(x-2)^2+y^2=8$.

【小问 3 详解】

若在 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 M 上存在点 P，使得 $|PN|=|PT|$ 成立，则 P 为线段 NT 的垂直平分线 l 与圆 M 的公共点.

所以当 l 与圆 M 相离时，不存在满足条件的点 P；当 l 与圆 M 相交或相切时则存在满足条件的点 P.

由 $N(-n,0)$，$T(-1,1)$，知 NT 的斜率为 $\dfrac{1}{n-1}$，线段 NT 的中点为 $\left(-\dfrac{n+1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

线段 NT 的垂直平分线 L 为 $y-\dfrac{1}{2}=-(n-1)\left(x+\dfrac{n+1}{2}\right)$，即 $(1-n)x-2y+(2-n^2)=0$.

圆 M 的圆心 M 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|2(1-n)-0+2-n^2|}{\sqrt{(1-n)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|n^2+2n-4|}{\sqrt{n^2-2n+5}}$，

（1）当 $n=1$ 时，$d=\dfrac{1}{2}$ 而 $r=2\sqrt{2}$，由 $d<r$，此时直线 l 与圆 M 相交，存在满足条件 点 P；

（2）当 $n=2$ 时 $d=\frac{4}{\sqrt{5}}<\sqrt{8}=r$，此时直线 l 与圆 M 相交，存在满足条件的点 P；

（3）当 $n\geq 3$ 时，$n^2+2n>4$，$4n-9>0$，$n^2-2n+5-8=n^2-2n-3=(n+1)(n-3)\geq 0$，

所以

$$d=\frac{n^2+2n-4}{\sqrt{n^2-2n+5}}$$

$$=\sqrt{n^2-2n+5}+\frac{4n-9}{\sqrt{n^2-2n+5}}$$

$$>\sqrt{n^2-2n+5}$$

$$\geq\sqrt{8}$$

$$=r$$

此时直线 l 与圆 M 相离，不存在满足条件的点 P

综上：当 n=1 或 2 时，存在点 P，当 n≥3 时，不存在点 P.

【点睛】本题主要考查了两直线垂直的斜率关系的应用，直线方程的点斜式的应用，直角三角形的外接圆的性质的应用，两直线的交点、点到直线的距离公式等基础知识，本题考查的知识点较多，要求考生具备综合应用知识的能力，属于中档题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。