

大教育山东联盟学校 2022 届高三收心考试

数 学

本试卷共 6 页,22 道小题 满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号、座号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $M = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x \in \mathbf{R} | x^2 < 5\}$, 则 $M \cap N =$
 - $\{-1, 1\}$
 - $\{-1, 0\}$
 - $\{0, 1\}$
 - $\{-1, 0, 1\}$
- 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若在复平面内复数 $z_1 = 8 + 5i$ 与 $z_2 = 4 + ai$ 对应的两点之间的距离为 4, 则 $a =$
 - 4
 - 5
 - 6
 - 8
- 已知 a, b 是两条不重合的直线, α 是一个平面, 且 $a \perp \alpha$, 则 “ $b \perp \alpha$ ” 是 “ $a \parallel b$ ” 的
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 若 $(x - 2y)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则 $n =$
 - 9
 - 10
 - 11
 - 12
- 若 $P(x, y)$ 是函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象上的一点, 则 $Q\left(\frac{1}{3}x, 3y\right)$ 就是函数 $y = A\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0, A > 0$) 图象上的相应的点, 则 ω, A 的值分别为
 - $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$
 - $3, \frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{3}, 3$
 - $3, 3$
- 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上, 游回产地产卵。记鲑鱼的游速为 v m/s, 鲑鱼的耗氧量的单位数为 Q 。研究鲑鱼的科学家发现 v 与 $\log_3 \frac{Q}{100}$ 成正比, 且当 $Q = 900$ 时, $v = 1$ 。若一条鲑鱼要把游速提高 1 m/s, 则

其耗氧量的单位数应变为原来的

- A. 9 倍 B. 27 倍 C. 36 倍 D. 81 倍

7. 已知抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , A 是 E 上位于第一象限内的一点, 过点 A 作 E 的切线, 交 x 轴于 P 点, 交 y 轴于 Q 点, 若 $\angle PAF = 30^\circ$, 则 $\angle AFQ =$

- A. 60° B. 90° C. 120° D. 150°

8. 已知 $0 < a < 4, 0 < b < 2, 0 < c < 3$, 且 $16 \ln a = a^2 \ln 4, 4 \ln b = b^2 \ln 2, 9 \ln c = c^2 \ln 3$, 则

- A. $c > b > a$ B. $c > a > b$ C. $a > c > b$ D. $b > c > a$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 的解析式可以是

- A. $f(x) = x^2 - x$ B. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0, \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$
 C. $f(x) = x - x^{-1}$ D. $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ -\ln(-x), & x < 0 \end{cases}$

10. 从有大小和质地相同的 3 个红球和 2 个蓝球的袋子中, 每次随机摸出 1 个球, 摸出的球不再放回, 则

- A. 第一次摸到红球的概率为 $\frac{3}{5}$
 B. 第二次摸到红球的概率为 $\frac{3}{5}$
 C. 在第一次摸到蓝球的条件下, 第二次摸到红球的概率为 $\frac{4}{5}$
 D. 在前两次都摸到蓝球的条件下, 第三次摸到红球的概率为 $\frac{2}{3}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别为边 BC, AC, AB 的中点, G 为 AD, BE, CF 的交点, 则

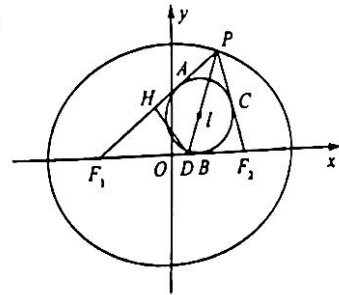
- A. $\vec{AF} + \vec{BD} + \vec{CE} = \vec{0}$ B. $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{BE} \cdot \vec{CA} = \vec{CF} \cdot \vec{AB}$
 C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ D. $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = \vec{CG} \cdot \vec{CA}$

12. 如图, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 E 上异于顶点的一动点, 圆 I

(圆心为 I) 与 $\triangle PF_1F_2$ 的三边 PF_1, F_1F_2, PF_2 分别切于点 A, B, C .

延长 PI 交 x 轴于点 D , 作 $DH \perp PF_1$ 交 PF_1 于点 H , 则

- A. $|PF_1| + |PF_2|$ 为定值
 B. $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 为定值
 C. $|PA|$ 为定值
 D. $|PH|$ 为定值



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\tan 10^\circ - \tan 35^\circ - \tan 10^\circ \tan 35^\circ =$ _____

14. 已知 $a > 1$, 且 $(a-1)(b-1) = 4$, 则 $a+b$ 的最小值是 _____.

15. 18 世纪英国数学家辛卜森运用定积分, 推导出了现在中学数学教材

中柱、锥、球、台等几何体 Ω 的统一体积公式 $V = \frac{1}{6}h(L+4M+N)$

(其中 L, N, M, h 分别为 Ω 的上底面面积、下底面面积、中截面面积和高), 我们称为“万能求积公式”. 例如, 已知球的半径为 R , 可得

该球的体积为 $V = \frac{1}{6} \times 2R(0+4 \times \pi R^2+0) = \frac{4}{3} \pi R^3$; 已知正四棱锥

的底面边长为 a , 高为 h , 可得该正四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{6} \times h \left[0+4 \times \left(\frac{a}{2} \right)^2 + a^2 \right] = \frac{1}{3} a^2 h$. 类似地, 运

用该公式求解下列问题: 如图, 已知球 O 的表面积为 $36\pi \text{ cm}^2$, 若用距离球心 O 都为 2 cm 的两个平行平面去截球 O , 则夹在这两个平行平面之间的几何体 Π 的体积为 _____ cm^3 .

16. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = n(n-29)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____; 若 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{k+20}| = 110$, 则 k 的值是 _____.

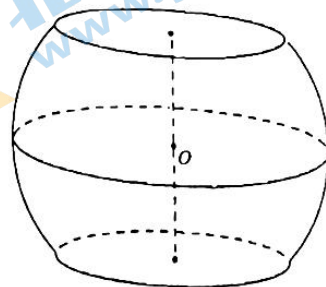
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $2a_n a_{n+1} = 4^n (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\max\{a, b\}$ 表示 a 与 b 的最大值, 记 $b_n = \max\{a_n, S_n - 7\}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .



18. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$,
 $PD=AD=2$,设过 AD 的平面与棱 PB,PC 分别交于点 E,F .

(1)求证:四边形 $Aefd$ 为梯形;

(2)若 E 为 PB 的中点,求平面 ADE 与平面 BDF 所成锐二面角的余弦值.



19. (12分)

某公司全年圆满完成预定的生产任务,为答谢各位员工一年来的锐意进取和辛勤努力,公司决定在联欢晚会后,拟通过摸球兑奖的方式对 500 位员工进行奖励,规定:每位员工从一个装有 4 种面值的奖券的箱子中,一次随机摸出 2 张奖券,奖券上所标的面值之和就是该员工所获得的奖励额.

(1)若箱子中所装的 4 种面值的奖券中有 1 张面值为 80 元,其余 3 张均为 40 元,试比较员工获得 80 元奖励额与获得 120 元奖励额的概率的大小;

(2)公司对奖励总额的预算是 6 万元,预定箱子中所装的 4 种面值的奖券有两种方案:第一方案是 2 张面值 20 元和 2 张面值 100 元;第二方案是 2 张面值 40 元和 2 张面值 80 元.为了使员工得到的奖励总额尽可能地符合公司的预算且每位员工所获得的奖励额相对均衡,请问选择哪一种方案比较好?并说明理由.

20. (12分)

一道解三角形的题目有一个条件不清楚,具体如下:

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{3}{4}$, $c = \sqrt{7}$, _____, 求 C .

经推断横线处的条件为三角形一边的长度,且答案提示 $C = 60^\circ$,试问在横线上的条件是 a 的长度还是 b 的长度? 并逐一说明理由.

21. (12分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 8$, $P(4, 6)$ 是 C 上一点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $M(1, 1)$ 的直线与 C 交于两点 A, B , 与直线 $l: y = 3x - 12$ 交于点 N . 设 $\vec{NA} = \lambda \vec{AM}$, $\vec{NB} = \mu \vec{BM}$, 求证: $\lambda + \mu$ 为定值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x^2 - a|1 + \ln x| (a > 0)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 讨论 $f(x)$ 零点的个数.