海淀区 2021~2022 学年第一学期期末练习

高三数学参考答案

2022.01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	C	D	C	A	C	B	C	B	B	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
答案	$y=2x, y=-2x$	$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$	$y=3\sin(2\pi x)$ 或 $y=3\cos(2\pi x)$ 或其它	$2,-2$	①②③

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

(16)(本小题共 14 分)

解：(Ⅰ) 由 $b^2+c^2-a^2+bc=0$，可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$

因为 $\angle A$ 为三角形内角，所以 $\angle A=120^\circ$.

(Ⅱ) 选择条件②③.

由(Ⅰ)知 $\angle C$ 为锐角，　　又因为 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle C=45^\circ$，

所以 $\angle B=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$，

所以 $\sin B=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

由正弦定理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

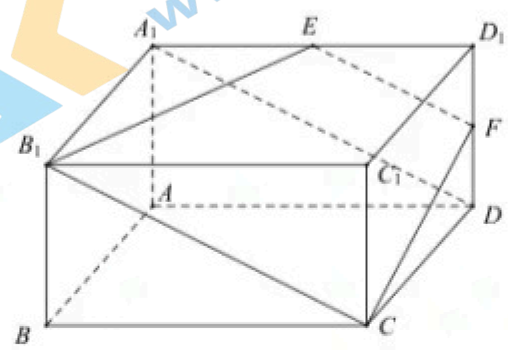
说明：最后两步也可以如下计算：

由正弦定理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）证法 1：



因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 AA_1D_1D // 平面 BB_1C_1C，平面 $AA_1D_1D\cap$ 平面 $B_1CE=EF$，

平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $B_1CE=B_1C$，

所以 B_1C // EF.

证法 2：

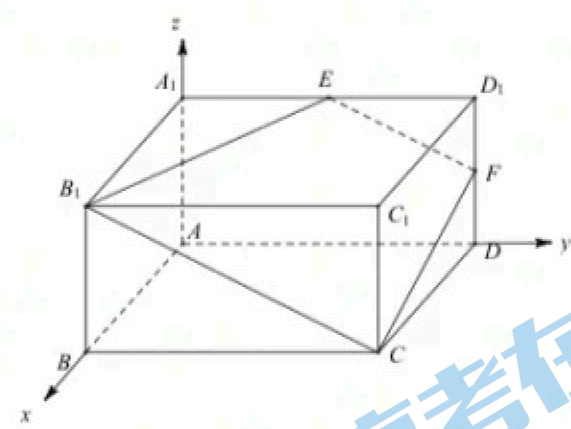
因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 AA_1D_1D // 平面 BB_1C_1C，$B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 B_1C // 平面 ADD_1A_1，

因为 $B_1C\subset$ 平面 CB_1E，平面 $ADD_1A_1\cap$ 平面 $CB_1E=EF$，

所以 B_1C // EF.

（Ⅱ）因为 AB，AD，AA_1 两两垂直，



所以以点 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系如图所示：　　---------------5 分

则 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$B_1(2,0,1)$，$E(0,1,1)$，

$\overrightarrow{B_1C}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{B_1E}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,1)$

平面 B_1EC_1 的法向量为 $\vec{n}_1=(0,0,1)$，

设平面 CB_1E 的法向量为 $\vec{n}_2=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1C}=0\\ \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1E}=0\end{cases}$，可得 $\begin{cases}2y-z=0\\ -2x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=2$，$z=4$，

所以 $\vec{n}_2=(1,2,4)$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle\right|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{4}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+4^2}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$.

又因为二面角 $C-B_1E-C_1$ 为锐角，

所以，二面角 $C-B_1E-C_1$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

设点 A 到平面 CB_1E 的距离为 d，

则 $d=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_2|}=\frac{|2+4|}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）法 1：设甲在首轮比赛中正确完成的题数为 ξ，易知 $\xi\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，

所以 $P(\xi\geqslant 2)=P(\xi=2)+P(\xi=3)$

$=C_3^2(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$.

法 2：$P(\xi\geqslant 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-\frac{1}{27}-\frac{2}{9}=\frac{20}{27}$.

（Ⅱ）由题意得 X 的取值范围是 $\{1,2,3\}$.

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$.

（Ⅲ）从正确完成实验操作的题数的均值方面分析 $E(\xi)=E(X)=2$，两人水平相当；

因为 $D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，$D(\xi)=3\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$，

所以，从正确完成实验操作的题数的方差方面分析 $D(X)<D(\xi)$，乙的水平更稳定；

因为 $P(X\geqslant 2)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，$P(\xi\geqslant 2)=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$. 所以 $P(X\geqslant 2)>P(\xi\geqslant 2)$.

从至少正确完成 2 题的概率方面分析，乙通过的可能性更大.

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为点 $A(0,-1)$ 在椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，

所以将点 $A(0,-1)$ 代入椭圆方程，可得 $\frac{0}{3}+\frac{1}{b^2}=1$，所以 $b^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

因为 $c^2=a^2-b^2=3-1=2$，所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 可得 $(3k^2+1)x^2-6k^2x+3(k^2-1)=0$.

$\Delta=36k^4-12(3k^2+1)(k^2-1)=24k^2+12>0$ 恒成立，

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3(k^2-1)}{3k^2+1}$.

直线 AE 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$，

令 $x=3$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\frac{3(y_1+1)}{x_1}-1$，

同理可得点 N 的纵坐标为 $y_N=\frac{3(y_2+1)}{x_2}-1$，

所以 $|MN|=|y_M-y_N|=3\left|\frac{y_1+1}{x_1}-\frac{y_2+1}{x_2}\right|=3\left|\frac{x_2(y_1+1)-x_1(y_2+1)}{x_1x_2}\right|$

$$=\frac{3|k-1||x_2-x_1|}{|x_1x_2|}$$

$$=\frac{3|k-1|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{|x_1x_2|}$$

$$=\frac{3|k-1|\sqrt{(\frac{6k^2}{3k^2+1})^2-4\frac{3(k^2-1)}{3k^2+1}}}{\left|\frac{3(k^2-1)}{3k^2+1}\right|}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{2k^2+1}}{|k+1|}.$$

因为 ΔAMN 的面积 $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}|MN|\times(3-0)=\frac{3}{2}|MN|=3\sqrt{3}$，

所以 $|MN|=2\sqrt{3}$，即 $\frac{\sqrt{2k^2+1}}{|k+1|}=1$，

化简得 $k^2-2k=0$，解得 $k=0$ 或 $k=2$.

所以 k 的值为 0 或 2.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=ae^x-\sin x+2x$，

所以 $f(0)=a$ 且 $f'(x)=ae^x-\cos x+2$，

所以 $f'(0)=a-1+2=a+1$，
所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-a=(a+1)(x-0)$，
即 $y=(a+1)x+a$.

（Ⅱ）当 $a\geqslant 0$，$x\in[0,1]$ 时，

因为 $f'(x)=ae^x-\cos x+2\geqslant 0+2-\cos x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，
所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0)=a$.

（Ⅲ）取 $a=-1$，以下证明 $f(x)=-e^x-\sin x+2x\leqslant -1$ 恒成立.

令 $g(x)=e^x+\sin x-2x-1$，即证 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立.

（1）当 $x\in(-\infty,0]$ 时，有 $e^x\leqslant 1$，$\cos x\in[-1,1]$，

所以 $g'(x)=e^x+\cos x-2\leqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，
所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒成立.

（2）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，令 $G(x)=g'(x)=e^x+\cos x-2$.

因为 $e^x>1$，$\sin x\in(0,1]$，所以 $G'(x)=e^x-\sin x>0$，

所以 $G(x)=g'(x)=e^x+\cos x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.
所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.
综上，$g(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)\leqslant a$ 恒成立.

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）B 不是典型表，C 是典型表；

（Ⅱ）方法 1.

S_6 不可能等于 17.

以下用反证法进行证明.

证明：假设 $S_6=17$，那么典型表 $(a_{ij})_{6\times 6}$ 中有 19 个 0，在六行中至少有一行 0 的个数不少于 4，不妨设此行为第一行，且不妨设 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$. 此时前四列中，每一列的其余位置中都至少有 4 个 1，所以前四列中至少有 16 个 1，

所以 a_{15} 与 a_{16} 中至多有一个 1，即 a_{15} 与 a_{16} 中至少有一个为 0，

不妨设 $a_{15}=0$，则第五列的其余位置中至少又有 5 个 1，

所以前五列中已经有不少于 21 个 1 了，与 $S_6=17$ 矛盾！

所以假设不成立. 所以 S_6 不可能等于 17.

（Ⅱ）方法 2.

S_6 不可能等于 17，以下证明 $S_6 \geqslant 18$.

证明：因为当典型表 $(a_{ij})_{6\times 6}$ 中 0 的个数不超过 18 时，那么 1 的个数不少于 18，

所以 $S_6 \geqslant 18$；以下只需证明当典型表 $(a_{ij})_{6\times 6}$ 中 0 的个数大于 18 时，也有 $S_6 \geqslant 18$ 成立.

当典型表 $(a_{ij})_{6\times 6}$ 中 0 的个数大于 18 时，在六行中至少有一行 0 的个数不少于 4，不妨设此行为第一行.

（1）若第一行 0 的个数为 6，则 $\sum_{j=1}^{6} a_{1j}+\sum_{i=1}^{6} a_{i1} \leqslant 5$，不合题意；

（2）若第一行 0 的个数为 5，不妨设 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{15}=0$，$a_{16}=1$，此时前 5 列中，每一列的其余位置都只能是 1，所以 $S_6 \geqslant 18$.

（3）若第一行 0 的个数为 4，不妨设 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$，$a_{15}=a_{16}=1$，此时前 4 列中，每一列的其余位置中都至少有 4 个是 1，所以 $S_6 \geqslant 18$.

综上，$S_6 \geqslant 18$. 所以 S_6 不可能等于 17.

（Ⅲ）方法 1

在水平方向的 n 行和竖直方向的 n 列中，一定存在某一行或某一列中含有的 1 的个数最少，不妨设第一行中的 1 最少，并设其个数为 k，其中 $k\in\{0,1,2,3,\cdots,n\}$.
且不妨设第一行中前 k 个为 1，后 $(n-k)$ 个为 0.
对于第一行中为 1 的这 k 列中，因为每一列都至少有 k 个 1，所以共有 k^2 个 1；
对于第一行中为 0 的 $(n-k)$ 列中，每一列中都至少有 $(n-k)$ 个 1，

所以 $S_n \geqslant k^2+(n-k)^2=2k^2-2nk+n^2=2(k-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2}{2}$.

以下记 $f(k)=2(k-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2}{2}$，

（1）当 n 为偶数时，则 $S_n \geqslant f(k) \geqslant 2(\frac{n}{2}-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}$ 对任意的 k 恒成立.

而且 S_n 可以取到 $\frac{n^2}{2}$. 例如：当“$1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}$ 且 $1\leqslant j\leqslant \frac{n}{2}$”和“$\frac{n}{2}+1\leqslant i\leqslant n$ 且 $\frac{n}{2}+1\leqslant j\leqslant n$”

时，$a_{ij}=1$，其它位置为 0，此时 $S_n=\frac{n^2}{2}$.

（2）当 n 为奇数时，则 $S_n\geqslant f(k)\geqslant 2(\frac{n-1}{2}-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2}{2}=\frac{n^2+1}{2}$ 对任意的 k 恒成立.

而且 S_n 可以取到 $\frac{n^2+1}{2}$. 例如：当 "$1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$ 且 $1\leqslant j\leqslant\frac{n-1}{2}$" 和 "$\frac{n+1}{2}\leqslant i\leqslant n$ 且 $\frac{n+1}{2}\leqslant j\leqslant n$" 时，$a_{ij}=1$，其它位置为 0，此时 $S_n=\frac{n^2+1}{2}$.

综上，当 n 为偶数时，S_n 的最小值为 $\frac{n^2}{2}$；

当 n 为奇数时，S_n 的最小值为 $\frac{n^2+1}{2}$.

（III）方法 2（整体分析，算两次）

设典型表 A 的第 i 列有 c_i 个 0，（$i=1,2,3,\cdots,n$），A 的第 j 列有 r_j 个 0，（$j=1,2,3,\cdots,n$），则典型表 A 中 0 的总个数为 $N=\sum_{i=1}^{n}c_i=\sum_{j=1}^{n}r_j$.

由定义可得 $\sum_{i=1}^{n}c_i(n-c_i)+\sum_{j=1}^{n}r_j(n-r_j)\geqslant nN$ ，

所以 $nN-\sum_{i=1}^{n}c_i^2+nN-\sum_{j=1}^{n}r_j^2\geqslant nN$ ，所以 $\sum_{i=1}^{n}c_i^2+\sum_{j=1}^{n}r_j^2\leqslant nN$.

又因为 $\sum_{i=1}^{n}c_i^2\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{n}c_i)^2}{n}=\frac{N^2}{n}$， $\sum_{i=1}^{n}r_j^2\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{n}r_j)^2}{n}=\frac{N^2}{n}$，

所以 $\frac{2N^2}{n}\leqslant nN$，所以 $N\leqslant\frac{n^2}{2}$，

所以 $S_n\geqslant\frac{n^2}{2}$.

（1）当 n 为偶数时，S_n 可以取到 $\frac{n^2}{2}$. 例如：当"$1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}$ 且 $1\leqslant j\leqslant\frac{n}{2}$"和"$\frac{n}{2}+1\leqslant i\leqslant n$ 且 $\frac{n}{2}+1\leqslant j\leqslant n$"时，$a_{ij}=1$，其它位置为 0，此时 $S_n=\frac{n^2}{2}$.

（2）当 n 为奇数时，$S_n\geqslant\frac{n^2+1}{2}$，而且 S_n 可以取到 $\frac{n^2+1}{2}$.例如：当"$1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$ 且

$1\leqslant j\leqslant\frac{n-1}{2}$ ”和“ $\frac{n+1}{2}\leqslant i\leqslant n$ 且 $\frac{n+1}{2}\leqslant j\leqslant n$ ”时， $a_{ij}=1$ ，其它位置为 0，此时 $S_n=\frac{n^2+1}{2}$.

综上，当 n 为偶数时， S_n 的最小值为 $\frac{n^2}{2}$；

当 n 为奇数时， S_n 的最小值为 $\frac{n^2+1}{2}$.

（Ⅲ）方法 3

在水平方向的 n 行和竖直方向的 n 列中，一定存在某一行或某一列中含有的的个数最少，不妨设第一行中的 1 最少，并设其个数为 k ，其中 $k\in\{0,1,2,3,\cdots,n\}$. 且不妨设第一行中前 k 个为 1，后 $(n-k)$ 个为 0.

（1）当 n 为偶数时，

若 $k\geqslant\frac{n}{2}$，则 $S_n\geqslant\frac{n}{2}\cdot n=\frac{n^2}{2}$；

若 $k<\frac{n}{2}$，对于第一行中为 1 的这 k 列中，因为每一列都至少有 k 个 1，所以共有 k^2 个 1；对于第一行中为 0 的 $(n-k)$ 列中，每一列中都至少有 $(n-k)$ 个 1，

所以 $S_n\geqslant k^2+(n-k)^2=\frac{n^2}{2}+2(\frac{n}{2}-k)^2\geqslant\frac{n^2}{2}$.

而且 S_n 可以取到 $\frac{n^2}{2}$. 例如：当“ $1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}$ 且 $1\leqslant j\leqslant\frac{n}{2}$ ”和“ $\frac{n}{2}+1\leqslant i\leqslant n$ 且 $\frac{n}{2}+1\leqslant j\leqslant n$ ”时， $a_{ij}=1$ ，其它位置为 0，此时 $S_n=\frac{n^2}{2}$.

（2）当 n 为奇数时，

若 $k\geqslant\frac{n+1}{2}$ ，则 $S_n\geqslant\frac{n+1}{2}\cdot n\geqslant\frac{n^2+1}{2}$ ；

若 $k<\frac{n+1}{2}$ ，对于第一行中为 1 的这 k 列中，因为每一列都至少有 k 个 1，所以共有 k^2 个 1；对于第一行中为 0 的 $(n-k)$ 列中，每一列中都至少有 $(n-k)$ 个 1，

所以 $S_n\geqslant k^2+(n-k)^2=2k^2-2nk+n^2\geqslant\frac{n^2+1}{2}$.

而且 S_n 可以取到 $\frac{n^2+1}{2}$. 例如：当 “ $1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$ 且 $1\leqslant j\leqslant\frac{n-1}{2}$ ” 和 “ $\frac{n+1}{2}\leqslant i\leqslant n$ 且 $\frac{n+1}{2}\leqslant j\leqslant n$ ” 时， $a_{ij}=1$ ，其它位置为 0，此时 $S_n=\frac{n^2+1}{2}$.

综上，当 n 为偶数时， S_n 的最小值为 $\frac{n^2}{2}$；

当 n 为奇数时， S_n 的最小值为 $\frac{n^2+1}{2}$.