2021北京师大二附中高一（下）期中

数　　学

班级：____________姓名：____________学号：____________

一、选择题（共 10 小题；共 40 分）

1. $\cos 330°$ 等于 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若向量 $\vec{a}=(1,x)$，$\vec{b}=(1-x,2)$，且 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则 x 的值为 (　　)

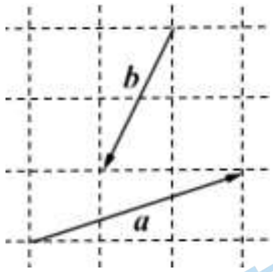
A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 0 或 1

3. 设 $\alpha\in(-\pi,\pi)$，且 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，则 $\alpha=$ (　　)

A. $-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$　　C. $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$　　D. $-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$

4. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\pi+\alpha)$ 的值为 (　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$



5. 向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 在正方形网格中的位置如右图所示，则 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$ (　　)

A. 45°　　B. 60°

C. 120°　　D. 135°

6. 下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单增的是 (　　)

A. $y=\sin 2x$　　B. $y=\cos 2x$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=\sin\frac{x}{2}$

7. 设 $\alpha\in[0,2\pi)$，则使 $\sin\alpha>\frac{1}{2}$ 成立的 α 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{2}$，$AB=2$，$AC=1$．D 是 BC 边上的动点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 (　　)

A. $[-4,1]$　　B. $[1,4]$　　C. $[-1,4]$　　D. $[-4,-1]$

9. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后，所得图象关于原点对称，则 ω 的最小值为 (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{9}{4}$

10. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=120°$，点 E，F 分别在边 BC，CD 上，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\mu\overrightarrow{DC}$．若 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为 (　　)

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{10}{9}$　　D. $\frac{11}{9}$

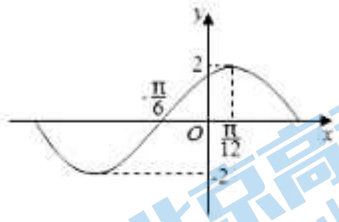
二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 设扇形半径为 2 cm，圆心角的弧度数为 2，则扇形的面积为________.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 x 轴对称．若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin\beta=$________.

13. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\alpha=$________.

14. 将函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，所得函数的部分图象如图所示，则 $f(x)=$________.



15. 已知函数 $f(x)=\sin x$．若存在 x_1，x_2，…，x_m 满足 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le 6\pi$．且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12$（$m\ge 2$，$m\in N^*$），则 m 的最小值为________.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 是第________象限角.

从①一，②二，③三，④四，这四个选项中选择一个你认为恰当的选项填在上面的横线上，并根据你的选择，解答以下问题：

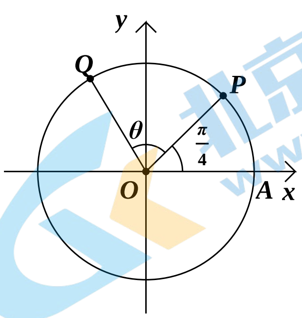
（1）求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

（2）化简求值：$\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos(2020\pi+\alpha)\tan(2020\pi-\alpha)}$.

17. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 为单位圆与 x 轴正半轴的交点，点 P 为单位圆上的一点，且 $\angle AOP=\frac{\pi}{4}$，点 P 沿单位圆按逆时针方向旋转角 θ 后到点 $Q(a,b)$.

（1）当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，求 ab 的值；

（2）设 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求 $b-a$ 的取值范围.



18. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x+a-1$ 的最大值为 1.

（1）求常数 a 的值.

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

（3）若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求函数 $f(x)$ 的值域.

19. 在正 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}(t\in\mathrm{R})$.

（1）试用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$；

（2）当 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取得最小值时，求 t 的值.

20. 已知向量 $\vec{a}=(\sin x,\cos x)$，$\vec{b}=(\cos x,-\cos x)$，设函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期，对称中心，对称轴；

（2） 若函数 $g(x)=f(x)-k$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，其中 $k\in\mathrm{R}$，试讨论函数 $g(x)$ 的零点个数.

21. 对于定义域为 R 的函数 $g(x)$，若存在正常数 T，使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数，则称 $g(x)$ 为余弦周期函数，且称 T 为其余弦周期．已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数，其值域为 R．设 $f(x)$ 单调递增，$f(0)=0$，$f(T)=4\pi$.

（1）验证 $h(x)=x+\sin\frac{x}{3}$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数；

（2）设 $a<b$，证明对任意 $c\in[f(a),f(b)]$，存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=c$；

（3）证明：“ u_0 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解”的充要条件是“ u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解”，并证明对任意 $x\in[0,T]$ 都有 $f(x+T)=f(x)+f(T)$.

2021北京师大二附中高一（下）期中数学

参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	A	D	D	C	B	A	B	A

二、填空题

11. $4\ \text{cm}^2$　　12. $-\frac{1}{3}$　　13. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$　　14. $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　　15. 8

16. （1） 因为 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以 α 为第三象限或第四象限角，

若选③，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$；

若选④，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$. ……………………………………6 分

（2）原式

$$\begin{aligned}&=\frac{\sin\alpha\cos\alpha(-\cos\alpha)}{\cos\alpha\tan(-\alpha)}\\&=\frac{-\sin\alpha\cos\alpha}{-\tan\alpha}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\\&=\cos^2\alpha\\&=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2\\&=\frac{16}{25}.\end{aligned}$$

……………………………………13 分

17. （1） 由三角函数的定义，可得 $P\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$Q\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)$.

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$Q\left(\cos\frac{5\pi}{12},\sin\frac{5\pi}{12}\right)$，即 $a=\cos\frac{5\pi}{12}$，$b=\sin\frac{5\pi}{12}$，

所以 $ab=\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times2\times\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{4}$. ……………………………………6 分

（2） 因为 $Q\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)$，所以 $a=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$，$b=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$，

由三角恒等变换的公式，化简可得：

$$\begin{aligned}b-a&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\\&=\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]\\&=\sqrt{2}\sin\theta,\end{aligned}$$

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $1\le\sqrt{2}\sin\theta\le\sqrt{2}$.

即 $b-a$ 的取值范围为 $[1,\sqrt{2}]$. ……………………………………13 分

18. （1） 函数

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x+a-1 \\ &= \cos x+\sqrt{3}\sin x+a \\ &= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+a, \end{aligned}$$

当 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ 时，函数 $f(x)$ 最大，$f(x)_{\max}=2+a=1$，

所以 $a=-1$．……………………………………5 分

（2） 由（1）可知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

得 $\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right]$，$k\in Z$．……………………………………10 分

（3） 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\in[0,1]$，即 $f(x)$ 值域为 $[0,1]$．……………………………………15 分

19.（1） 因为 $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=t(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$．……………………………………7 分

（2） 因为 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 $AB=2$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$．

因为 $\overrightarrow{PA}=(t-1)\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=(t-1)\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$．

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} &= (t-1)^2\overrightarrow{AB}^2-t(1-t)\overrightarrow{AC}^2+[(t-1)(1-t)-t(t-1)]\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= 4t^2-6t+2 \\ &= 4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以 $t=\frac{3}{4}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取最小值．……………………………………14 分

20• (1)

由题意，得

$$\begin{aligned} f(x) &= \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\ &= \sin x(\sin x+\cos x) \\ &= \frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

对称中心为：$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{1}{2}\right),k\in Z$，

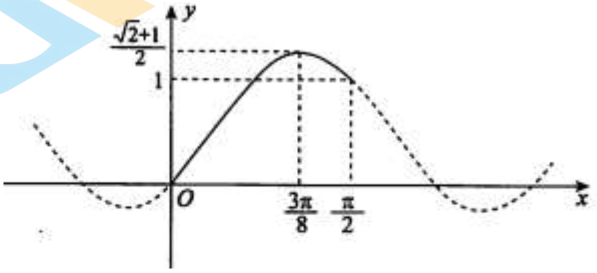
对称轴为：$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$ ....8 分

(2)由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $-\frac{\pi}{4}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

所以，函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的值域为 $\left[0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$，

由（2），得 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的图象如图所示.



由 $g(x)=f(x)-k=0$，得方程 $f(x)=k$.

所以研究函数 $g(x)$ 的零点个数，实际上就是研究方程 $f(x)=k$ 的解的个数.

考察函数 $f(x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $y=k$ 的图象和性质，得当 $k\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2},+\infty\right)$ 时，函数 $g(x)$ 没有零点；

当 $k\in[0,1)$，或 $k=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 有一个零点；

当 $k\in\left[1,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点. ....15 分

21.（1） 易见 $h(x)=x+\sin\frac{x}{3}$ 的定义域为 R，

对任意 $x\in$ R，$h(x+6\pi)=x+6\pi+\sin\frac{x+6\pi}{3}=h(x)+6\pi$，

所以 $\cos h(x+6\pi)=\cos(h(x)+6\pi)=\cos h(x)$，

即 $h(x)$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数. ....4 分

（2） 由于 $f(x)$ 的值域为 R，所以对任意 $c\in[f(a),f(b)]$，c 都是一个函数值，即有 $x_0\in$ R，使得 $f(x_0)=c$.

若 $x_0<a$，则由 $f(x)$ 单调递增得到 $c=f(x_0)<f(a)$，与 $c\in[f(a),f(b)]$ 矛盾，所以 $x_0\ge a$.

同理可证 $x_0\le b$. 故存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=c$. ....10 分

（3） 若 u_0 为 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解，则 $\cos f(u_0)=1$，且 $u_0+T\in[T,2T]$，$\cos f(u_0+T)=\cos f(u_0)=1$，即 u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解.

同理，若 u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解，则 u_0 为该方程在 $[0,T]$ 上的解.

以下证明最后一部分结论.

由（2）所证知存在 $0=x_0<x_1<x_2<x_3<x_4=T$，使得 $f(x_i)=i\pi$，$i=0,1,2,3,4$.

而 $[x_i,x_{i+1}]$ 是函数 $\cos f(x)$ 的单调区间，$i=0,1,2,3$.

与之前类似地可以证明：u_0 是 $\cos f(x)=-1$ 在 $[0,T]$ 上的解当且仅当 u_0+T 是 $\cos f(x)=-1$ 在 $[T,2T]$ 上的解.

从而 $\cos f(x)=\pm1$ 在 $[0,T]$ 与 $[T,2T]$ 上的解的个数相同.

故 $f(x_i+T)=f(x_i)+4\pi$，$i=0,1,2,3,4$.

对于 $x\in[0,x_1]$，$f(x)\in[0,\pi]$，$f(x+T)\in[4\pi,5\pi]$，而 $\cos f(x+T)=\cos f(x)$，故 $f(x+T)=f(x)+4\pi=f(x)+f(T)$.

类似地，当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$，$i=1,2,3$ 时，有 $f(x+T)=f(x)+f(T)$.

结论成立．..15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。