通州区 2023 年高三年级查漏补缺试题

数 学 试 卷

2023 年 5 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $A=\{x|y=\lg(x-1)\}$，$B=\{x\in Z||x|<3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$(1,3)$ （B）$[1,3)$ （C）{2} （D）{1，2}

（2）已知复数：$z=(1-2i)^2$，则 z 在复平面内对应的点位于

（A）第一象限 （B）第二象限 （C）第三象限 （D）第四象限

（3）设 $a=\ln 0.2$，$b=0.2^{e}$，$c=e^{0.2}$，则

（A）$a<b<c$ （B）$a<c<b$ （C）$c<b<a$ （D）$b<c<a$

（4）若 $(x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则 $a_2+a_4+a_6=$

（A）64 （B）33 （C）32 （D）31

（5）数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n-1}a_{n+1}=a_n$（$n\geq 2$），则 $a_{2023}=$

（A）$\frac{1}{4}$ （B）$\frac{1}{2}$ （C）2 （D）4

（6）等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q，前n项和为S_n，则“$a_1>0$”是“$\{S_n\}$是递增数列”的

（A）充分而非必要条件 （B）必要而非充分条件

（C）充要条件 （D）既不充分也不必要条件

（7）已知 F_1，F_2 分别为双曲线：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的上，下焦点，点 P 为双曲线渐近线上一点，若 $PF_1\perp PF_2$，$\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{3}$，则双曲线的离心率为

（A）$\frac{5}{3}$ （B）$\frac{5}{4}$ （C）$\frac{4}{5}$ （D）$\frac{3}{5}$

（8） 等腰三角形的屋顶，是我国古代建筑中经常采用的结构形式．一般说来等腰三角形底边是一定值，假设雨水与屋顶面间摩擦阻力不计，要使雨水从屋顶上流下所需的时间最短，等腰三角形的底角应设计为

（A）$30°$　　（B）$45°$　　（C）$60°$　　（D）$72°$

（9）过直线 $y=x$ 上的一点 P 作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$ 的两条切线 l_1，l_2，切点分别为 A，B，当直线 l_1，l_2 关于 $y=x$ 对称时，线段 PA 的长为

（A）4　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）2

（10）函数 $f(x)$的定义域为 D，若存在闭区间$[a,b]\subseteq$D，，使得函数 $f(x)$同时满足：$f(x)$在$[a,b]$上是单调函数且 $f(x)$在$[a,b]$上的值域为$[ka,kb](k>0)$，则称区间$[a,b]$为 $f(x)$的“k 倍值区间”．现有如下四个函数: ① $f_1(x)=e^x$，② $f_2(x)=x^2$，③ $f_3(x)=\ln(x+1)$，

④ $f_4(x)=\sin x\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.那么上述四个函数中存在“2 倍值区间”的有

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知 $\log_a 2=m,\log_a 3=n$，则 $a^{2m-n}=$______ .

（12）有两台车床加工同一型号零件，第1台加工的次品率为4%，第2台加工的次品率为5%，将两台车床加工出来的零件混放在一起，已知第1，2台车床加工的零件占比分别为40%，60%，现任取一件零件，则它是次品的概率为____.

（13）已知等边三角形 ABC 的边长为 2，⊙A 的半径为 1，PQ 为⊙A 的任意一条直径，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CB}=$________ .

（14）在△ ABC 中，若 $AB=4$，$AC=m$，$\cos B=\frac{2}{3}$，若 △ ABC 中存在且唯一，则△ ABC 面积的最小值为______ ；此时 m 的值为______.

（15）在棱长为 1 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$ $\mu\in[0,1]$．给出下列四个结论：

①所有满足条件的点 P 组成的区域面积为 1；

②当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积为定值；

③当$\lambda=1$时，点 P 到 A_1B 距离的最小值为 1；

④当$\mu=\frac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1B\perp$平面AB_1P

则所有正确结论的序号为______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为一组已知条件，使 $f(x)$ 的解析式唯一确定.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x)+f(x+\frac{\pi}{6})$，求 $g(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{4}]$上的最大值.

条件①： $f(x)$ 为奇函数；

条件②： $f(x)$ 图象上相邻两个对称中心间的距离为$\frac{\pi}{2}$；

条件③： $f(x)$ 图象的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{4}$.

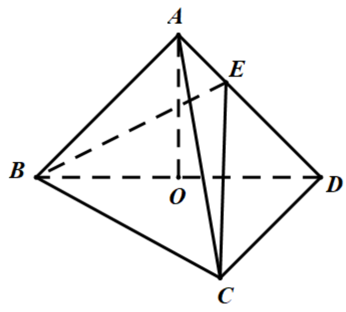
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD， $AB\perp AD$， $AB=AD$， O 为 BD 的中点.

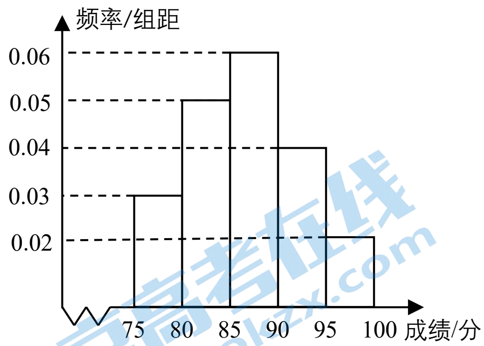
（Ⅰ）证明： $OA\perp CD$；

（Ⅱ）若$\triangle BCD$ 是等腰直角三角形， $\angle BDC=90^\circ$， $CD=2$，点 E 在棱 AD 上（与 A，D 不重合），若二面角 $E-BC-D$ 的大小为$45°$，求点 D 到面 BCE 的距离.



（18）（本小题 13 分）

某学校组织高一、高二年级学生进行了“纪念建党 100 周年”的知识竞赛．从这两个年级各随机抽取了 40 名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表．



高一

成绩分组	频数
[75，80)	2
[80，85)	6
[85，90)	16
[90，95)	14
[95，100]	2

高二

规定成绩不低于 90 分为“优秀”．

（Ⅰ）估计高一年级知识竞赛的优秀率；

（Ⅱ）将成绩位于某区间的频率作为成绩位于该区间的概率．在高一、高二年级学生中各选出 2 名学生，记这 4 名学生中成绩优秀的人数为ξ，求随机变量ξ的分布列；

（Ⅲ）在高一、高二年级各随机选取 1 名学生，用 X,Y 分别表示所选高一、高二年级学生成绩优秀的人数．写出方差 DX，DY 的大小关系．（只需写出结论）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C 截直线 $x=\sqrt{2}$ 所得线段的长度为2．

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)动直线 l:$y=kx+m(m\neq0)$交椭圆 C 于 A，B 两点，交 y 轴于点 M，D 为线段 AB 的中点，点 N 是 M 关于 O 的对称点，以 N 点为圆心的圆过原点 O，直线 DF 与⊙N 相切于点 F，求$\dfrac{|ND|}{|NF|}$的最大值.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{a}{x}-\ln x\ (a>0)$.

(Ⅰ)已知 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$,求实数 a 的值;

(Ⅱ)已知 $f(x)$ 在定义域上是增函数,求实数 a 的取值范围.

(Ⅲ)已知 $g(x)=f(x)+\dfrac{a}{x}$ 有两个零点 x_1,x_2,求实数a的取值范围并证明 $x_1x_2>e^2$.

(21)(本小题 15 分)

已 知 : 正 整 数 列 $\{a_n\}$ 各 项 均 不 相 同 , $n\in N*$, 数 列 $\{T_n\}$ 的 通 项 公 式

$$T_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+2+\cdots+n}.$$

(Ⅰ)若 $T_5=3$,写出一个满足题意的正整数列$\{a_n\}$的前 5 项;

(Ⅱ)若 $a_1=1$,$a_2=2$,$T_n=\dfrac{a_n}{n}$,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅲ)若 $\forall k\in N^*$,都有 $a_k\leqslant n$,是否存在不同的正整数 i,j,使得 T_i,T_j 为大于 1 的整数,其中 $\dfrac{n}{2}\le i<j$.

(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)

通州区2023年高三年级查漏补缺试题

数学参考答案及评分标准

2023年5月

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	C	C	A	D	C	B	B	B	C	B

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）$\frac{4}{3}$　　（12）0.046　　（13）1　　（14）$\frac{16\sqrt{5}}{9}$；$\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　（15）①②③

说明：（（14）题前3后2；（15）题全选对5分，漏选3分，其他情况0分。

三、解答题（共6小题，共85分）

（16）（本小题13分）

解：选①②

（Ⅰ）由① $f(x)$ 为奇函数，

所以有 $f(-x)=-f(x)$，即 $\sin(-2x+\varphi)=-\sin(2x+\varphi)$，

解得 $\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=0$.　　　…………3分

由条件②得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$.

所以 $f(x)=\sin 2x$.　　　…………6分

（Ⅱ）$g(x)=\sin 2x+\sin[2(x+\frac{\pi}{6})]$

$=\sin 2x+\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　　…………10分

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，

所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时 $g(x)$ 取得最大值，最大值为 $\sqrt{3}$.　…………13分

选②③

由条件②得 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$ ．

由③一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}$，

可得 $2\times\dfrac{\pi}{4}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

解得 $\varphi=k\pi$ ， $k\in\mathbf{Z}$.

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=0$

所以 $f(x)=\sin 2x$.

（Ⅱ） $g(x)=\sin 2x+\sin[2(x+\dfrac{\pi}{6})]$

$=\sin 2x+\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{3}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$

因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$.

所以当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 时，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时 $g(x)$ 取得最大值，最大值为 $\sqrt{3}$. ……………13 分

（17）（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：因为 $AB=AD$，O 为 BD 的中点，

所以 $AO\perp BD$.

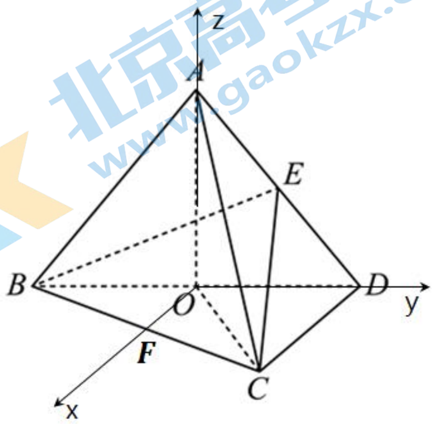
又因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$， $AO\subset$ 平面 ABD

所以 $AO\perp$ 平面 BCD.

因为 $CD\subset$ 平面 BCD，

所以 $AO\perp CD$. …………5 分

（Ⅱ）设 BC 的中点为 F，以 0 为坐标原点，以 OF，OD，OA 所在直线为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $O(0,0,0)$， $B(0,-1,0)$， $C(2,1,0)$， $D(0,1,0)$ ，

设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AD}$ $(0<\lambda<1)$，则 $E(0,\lambda,1-\lambda)$.

由题意可知 $\overrightarrow{OA}$ 是平面 BCD 的一个法向量， $\overrightarrow{OA}=(0,0,1)$，

设平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{BC}=(2,2,0)$，

$\overrightarrow{BE}=(0,\lambda+1,1-\lambda)$.

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x+2y=0\\ (\lambda+1)y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$， $z=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$

则平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda})$

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{OA}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\vec{n}||\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{1+1+(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda})^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}=\sqrt{2}$

设点 D 到平面 BCE 的距离为 d

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=1$.

即点 D 到面 BCE 的距离为 1.　　　　…………14 分

（18）（本小题 13 分）

（Ⅰ）高一年级知识竞赛的优秀率为

$(0.04+0.02)\times5=0.3$.　　　　………………3 分

所以高一年级知识竞赛的优秀率为30%.

（Ⅱ）在高一年级学生中选中成绩优秀学生的概率为 $\dfrac{3}{10}$，选中成绩不优秀学生的概率为 $\dfrac{7}{10}$；

在高二年级学生中选中成绩优秀学生的概率为 $\dfrac{2}{5}$，选中成绩不优秀学生的概率为 $\dfrac{3}{5}$.

ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，4;　　　　………………5 分

$$P(\xi=0)=(\frac{7}{10})^2\times(\frac{3}{5})^2=\frac{441}{2500};$$

$$P(\xi=1)=C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times(\frac{3}{5})^2+(\frac{7}{10})^2\times C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{966}{2500};$$

$$P(\xi=2)=(\frac{3}{10})^2\times(\frac{3}{5})^2+C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+(\frac{7}{10})^2\times(\frac{2}{5})^2=\frac{781}{2500};$$

$$P(\xi=3)=(\frac{3}{10})^2\times C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times(\frac{2}{5})^2=\frac{276}{2500}$$

$$P(\xi=4)=(\frac{3}{10})^2\times(\frac{2}{5})^2=\frac{36}{2500}.$$

所以随机变量 ξ 的分布列为：

P	0	1	2	3	4
ξ	$\frac{441}{2500}$	$\frac{966}{2500}$	$\frac{781}{2500}$	$\frac{276}{2500}$	$\frac{36}{2500}$

………………10 分

（III） $DX<DY$. ………………13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ） 由椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

得 $a^2=2(a^2-b^2)$.

又当 $x=\sqrt{2}$ 时， $y^2=b^2-\frac{2b^2}{a^2}$ ，

得 $b^2-\frac{2b^2}{a^2}=1$，所以 $a^2=4$， $b^2=2$.

因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………5 分

（II）设 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$.

联立方程 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2=4, \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

由 $\Delta>0$ 得 $m^2<4k^2+2$ （*）

且 $x_1+x_2=\dfrac{4km}{2k^2+1}$ ，

因此 $y_1+y_2=\dfrac{2m}{2k^2+1}$ ，所以 $D(-\dfrac{2km}{2k^2+1},\dfrac{m}{2k^2+1})$ ，

又 $N(0,-m)$ ，所以 $|ND|^2=(-\dfrac{2km}{2k^2+1})^2+(\dfrac{m}{2k^2+1}+m)^2$

整理得：$|ND|^2=\dfrac{4m^2(1+3k^2+k^4)}{(2k^2+1)^2}$ ，

因为 $|NF|=|m|$，

所以 $\dfrac{|ND|^2}{|NF|^2}=\dfrac{4(k^4+3k^2+1)}{(2k^2+1)^2}=1+\dfrac{8k^2+3}{(2k^2+1)^2}$

令 $t=8k^2+3, t\geq 3$ 故 $2k^2+1=\dfrac{t+1}{4}$

所以 $\dfrac{|ND|^2}{|NF|^2}=1+\dfrac{16t}{(1+t)^2}=1+\dfrac{16}{t+\dfrac{1}{t}+2}$

因为 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，因此 $y=t+\dfrac{1}{t}\geq\dfrac{10}{3}$

等号当且仅当 $t=3$ 时成立， 此时 $\dfrac{|ND|^2}{|NF|^2}\leq 1+3=4$，$\dfrac{|ND|}{|NF|}$ 最大值为 2. …………15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=ax-\dfrac{a}{x}-\ln x$，

所以 $f'(x)=a+\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}$ ．

所以 $f'(1)=2a-1$

又$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=x-1$，

所以 $f'(1)=2a-1=1$.

解得$a=1$. …………4 分

（Ⅱ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

因为 $f(x)$ 在定义域上为增函数，

所以 $f'(x)=a+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{ax^2-x+a}{x^2}\geqslant 0$ 恒成立.

$a(x^2+1)\geqslant x$，

即 $a\geqslant\frac{x}{x^2+1}$，

令 $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$，

所以 $g'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.

所以 $g(x)_{最小值}=g(1)=\frac{1}{2}$，

即 $a\geqslant\frac{1}{2}$. …………8 分

（III） $g(x)=ax-\ln x$,

定义域为 $(0,+\infty)$, $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不合题意.

当 $a>0$ 时， $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

$g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{a})=1-\ln\frac{1}{a}$.

函数 $g(x)$ 存在两个零点的必要条件是

$g(\frac{1}{a})=1-\ln\frac{1}{a}<0$

即 $0<a<\frac{1}{e}$.

又 $g(1)=a>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,\frac{1}{a})$ 上存在一个零点（$\frac{1}{a}>1$）.

当 $x\to+\infty$ 时， $g(x)\to+\infty$，

所以 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上存在一个零点

综上函数 $g(x)$ 有两个零点，实数 a 的取值范围是 $0<a<\frac{1}{e}$.　　　　…………11 分

不妨设两个零点 $x_2>x_1>0$，

由 $g(x_1)=g(x_2)=0$

所以 $\ln x_1=ax_1, \ln x_2=ax_2$

所以 $\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$

所以 $a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$

要证 $x_1x_2>e^2$

只需证 $\ln(x_1x_2)>2$

只需证 $\ln x_1+\ln x_2>2$

由 $\ln x_1+\ln x_2=ax_1+ax_2=a(x_1+x_2)=(x_1+x_2)\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$

只需证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$

只需证 $\ln x_1-\ln x_2<\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$

只需证 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$

令 $\frac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，只需证 $\ln t<\frac{2(t-1)}{t+1}$

令 $H(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，

$H'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t+1)^2-4t}{t(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$

$\therefore H(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增

$\therefore H(t)<H(1)=0$

即 $\ln t<\frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立

所以 $x_1x_2>e^2$ 成立.　　　　…………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$a_1=3$，$a_2=6$，$a_3=9$，$a_4=12$，$a_5=15$.

（Ⅱ）设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

由已知得 $T_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{2S_n}{n(n+1)}=\dfrac{a_n}{n}$.

即 $S_n=\dfrac{1}{2}(n+1)a_n$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时有 $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2}(n+1)a_n-\dfrac{1}{2}na_{n-1}$.

整理得 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}$

所以数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 为常数列.

又 $a_1=1$，$a_2=2$，

所以有 $\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{a_1}{1}=1$.

所以 $\dfrac{a_n}{n}=1$.

所以 $a_n=n$.

（III）$T_i=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{1+2+\cdots i}$

设 $a_1+a_2+\cdots+a_i=S_i$

所以 $1+2+\cdots+i\leqslant S_i\leqslant n+(n-1)+\cdots+(n-i+1)$

即 $\dfrac{i(i+1)}{2}\leqslant S_i\leqslant\dfrac{i(2n-i+1)}{2}$

所以 $1\leqslant T_i\leqslant\dfrac{2(n+1)}{i+1}-1$

因为 $\dfrac{n}{2}\leqslant i\leqslant n$

所以 $\dfrac{2(n+1)}{i+1}-1\leqslant\dfrac{2(n+1)}{\frac{n}{2}+1}-1=\dfrac{4n+4}{n+2}-1=3-\dfrac{4}{n+2}<3$

又因为 T_i 为大于 1 的整数

所以 T_i 的可能取值为 2.

同理 T_j 的可能取值为 2.

所以 $S_i=i(i+1)$，$S_j=j(j+1)$.

$S_j - S_i = (j-i)(j+i+1) > (j-i)(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1) = (j-i)(n+1)$

又因为 $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j < (j-i)n$

所以不存在存在不同的正整数 i, j，使得 T_i，T_j 为大于 1 的整数.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。