

数学试卷

2021 年 7 月

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,请将答题卡交回。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题要求的一项。

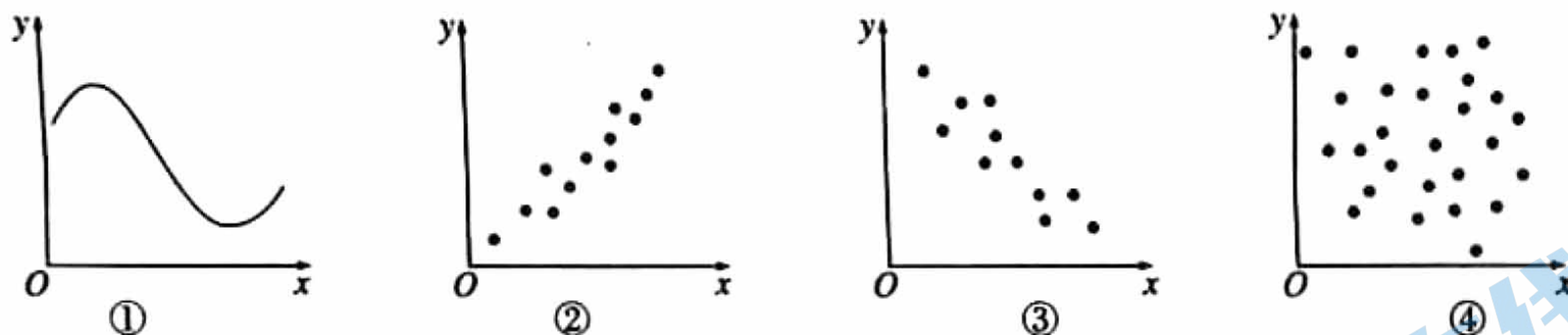
1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 4\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $(-1, 4]$ (B) $(-1, 4)$ (C) $(0, 3)$ (D) $(0, 4]$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ ”的否定为

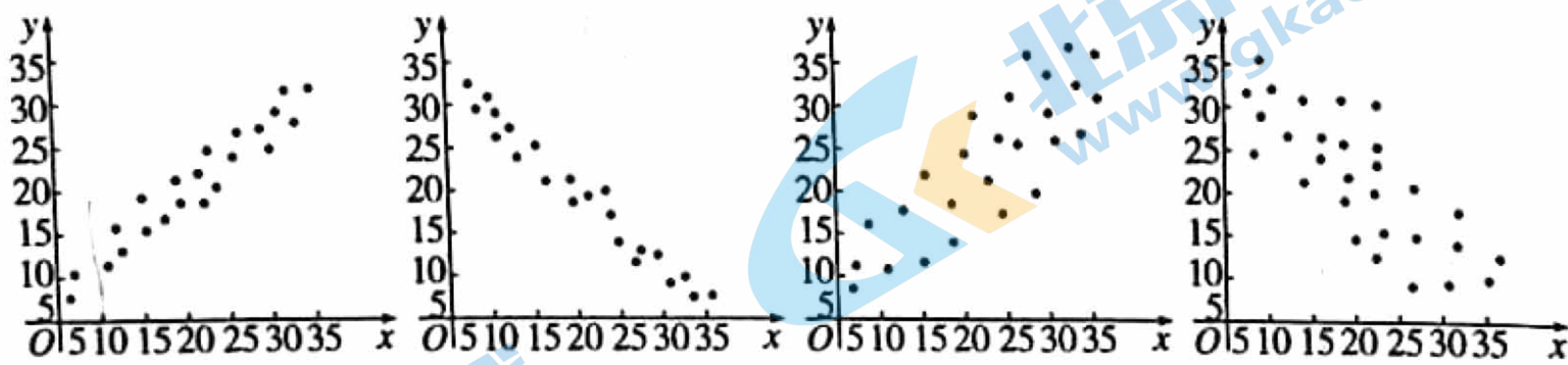
- (A) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ (B) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$
 (C) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 < 0$ (D) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$

3. 在下列各图中的两个变量具有线性相关关系的图是



- (A) ①② (B) ①③ (C) ②③ (D) ②④

4. 对四组数据进行统计,获得以下散点图,关于其相关系数的比较,正确的是



①相关系数 r_1 ②相关系数 r_2 ③相关系数 r_3 ④相关系数 r_4

- (A) $r_2 < r_4 < r_3 < r_1$ (B) $r_2 < r_4 < r_1 < r_3$
 (C) $r_4 < r_2 < r_1 < r_3$ (D) $r_4 < r_2 < r_3 < r_1$

5. A, B, C, D, E 五个人站成一排, A 和 C 分别站在 B 的两边(可以与 B 相邻,也可以与 B 不相邻)的不同站法共有

- (A) 12 种 (B) 16 种 (C) 28 种 (D) 40 种

6. 在 $(x - \frac{1}{x^2})^6$ 的展开式中,常数项为

- (A) -15 (B) -30 (C) 15 (D) 30

7. 学校有 A, B 两个餐厅, 如果王同学早餐在 A 餐厅用餐, 那么他午餐也在 A 餐厅用餐的概率是 $\frac{3}{4}$; 如果他早餐在 B 餐厅用餐, 那么他午餐在 A 餐厅用餐的概率是 $\frac{1}{4}$. 若王同学早餐在 A 餐厅用餐的概率是 $\frac{3}{4}$, 那么他午餐在 B 餐厅用餐的概率是

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$

8. “ $x < y$ ”是“ $\ln x < \ln y$ ”成立的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

9. 已知指数函数 $f(x) = a^x$, 将函数 $f(x)$ 的图象上的每个点的横坐标不变, 纵坐标扩大为原来的 3 倍, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 再将 $g(x)$ 的图象向右平移 2 个单位长度, 所得图象恰好与函数 $f(x)$ 的图象重合, 则 a 的值是

- (A) ± 3 (B) 3 (C) $\pm\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq a, \\ x^2, & x > a. \end{cases}$ 若集合 $\{x | x > 0, f(x) = f(-x)\}$ 恰有 2 个元素, 则 a 的取值范围是

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $[0, 2)$ (C) $[0, 4)$ (D) $[2, 4)$

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

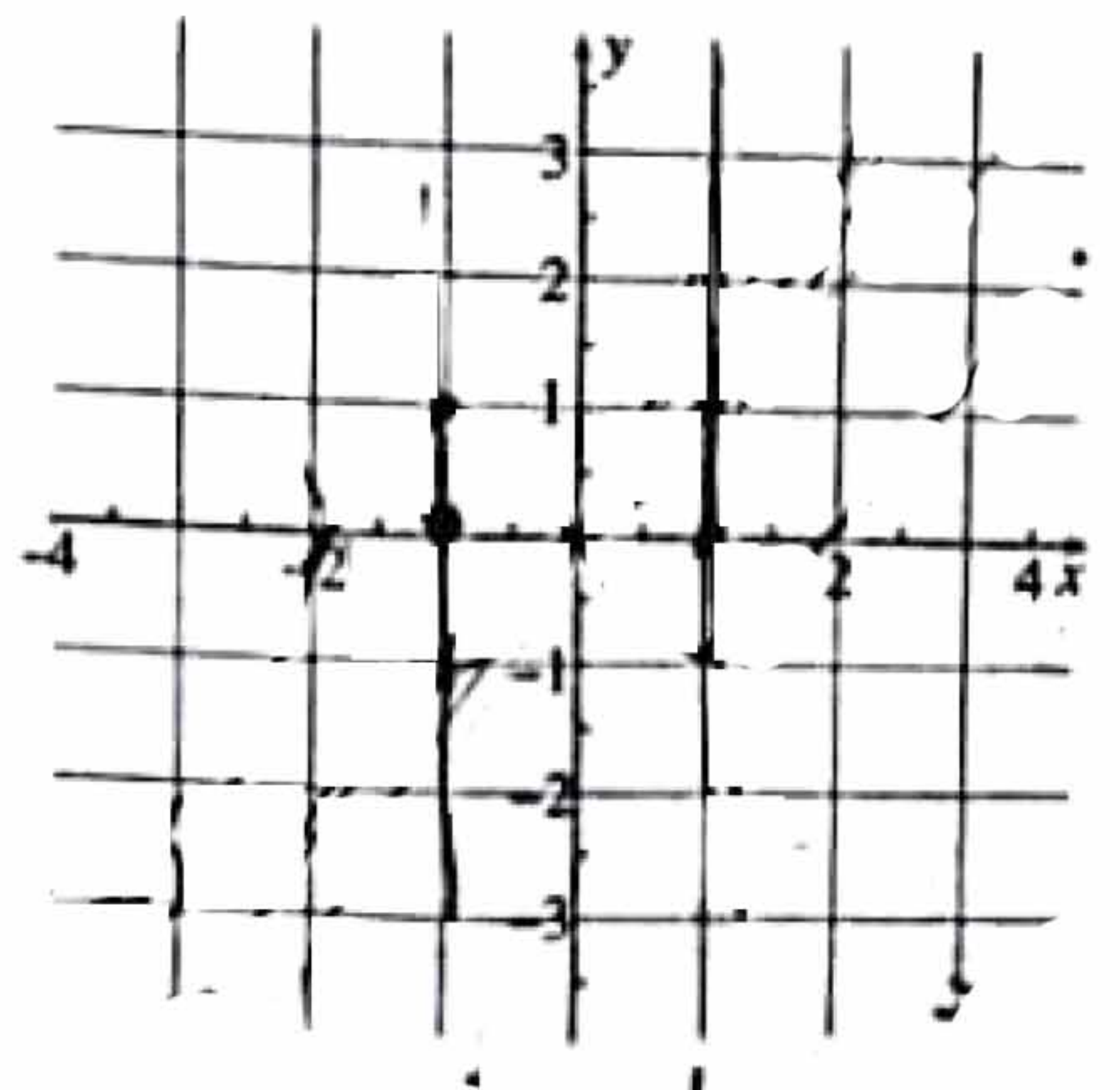
11. 函数 $f(x) = \ln x + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 _____.
12. 已知变量 x 和变量 y 的一组随机观测数据 $(2, 30), (4, 40), (5, 60), (6, 50), (8, 70)$. 如果 Y 关于 x 的经验回归方程是 $\hat{y} = 6.5x + 17.5$, 那么当 $x = 5$ 时, 残差等于 _____.
13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 若 $P(X \leq 0) = 0.2$, 则 $P(X < 2) =$ _____.
14. 袋中有 4 个红球和 1 个白球, 每次从袋中不放回地随机摸出一球, 一旦摸出白球即停止摸球, 并记此时摸球次数为 X , 则 $E(X) =$ _____.
15. 已知 $x > 0, y > 0, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y$ 的最大值是 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题 14 分)

已知函数 $y = f(x)$ 是图象经过点 $(2, 4)$ 的幂函数, 函数 $y = g(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的奇函数, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g(x) = f(x) - 2x$.

- (I) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;
(II) 求当 $x \in (-\infty, 0)$ 时函数 $y = g(x)$ 的解析式, 并在给定的坐标系中画出 $y = g(x) (x \in \mathbb{R})$ 的图象;
(III) 写出函数 $y = g(x) (x \in \mathbb{R})$ 的单调区间.



17. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax - 2, a \in \mathbb{R}$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集;

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq (2a - 1)x - 6$ 在 $(0, 2]$ 上恒成立, 求 a 的最大值.

18. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = 3^x, g(x) = |x + a| - 2 (a \in \mathbb{R})$.

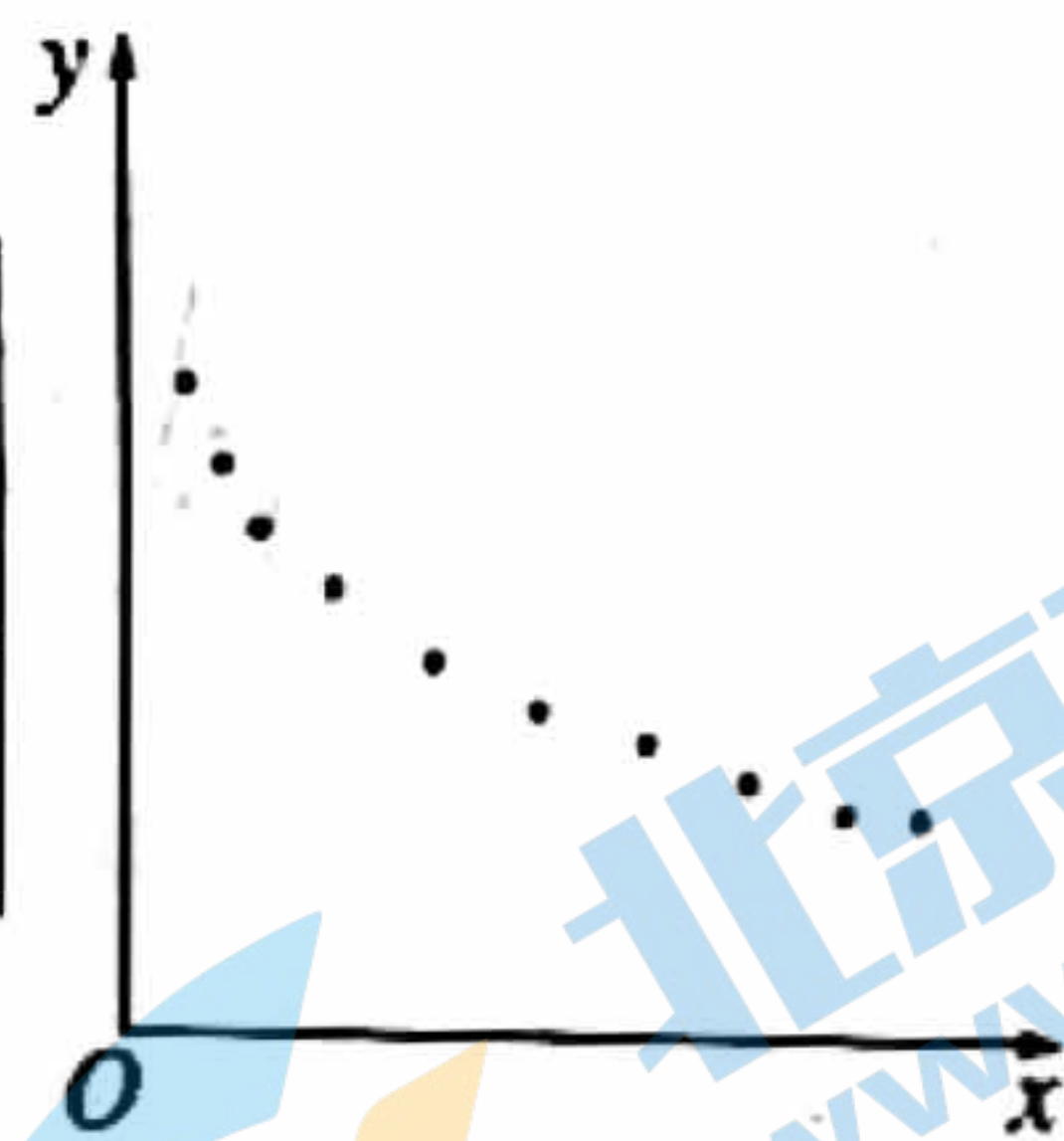
(I) 若函数 $y = f(g(x))$ 是偶函数, 求 a ;

(II) 若函数 $y = g(f(x))$ 存在两个零点, 求 a 的取值范围.

19. (本小题 14 分)

某公司对某产品作市场调查, 获得了该产品的定价 x (单位: 万元/吨) 和一天的销量 y (吨) 的一组数据, 根据这组数据制作了如下统计表和散点图.

\bar{x}	\bar{y}	\bar{t}	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} t_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{10} t_i y_i$
0.33	10	3	0.164	100	68	350



表中 $t = \frac{1}{x}$.

(I) 根据散点图判断, $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 与 $\hat{y} = \hat{c}x^{-1} + \hat{d}$ 哪一个更适合作为 Y 关于 x 的经验回归方程; (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据(I)的判断结果, 建立 Y 关于 x 的经验回归方程;

(III) 若生产 1 吨该产品的成本为 0.25 万元, 依据(II)的经验回归方程, 预计每吨定价至少多少时, 该产品一天的销售利润最大? 最大利润是多少?

$$\text{(经验回归方程 } \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} \text{ 中, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x})$$

20. (本小题 14 分)

为了研究高三年级学生的性别和身高是否大于 170 cm 的关联性,同学甲调查了某中学高三年级所有学生,整理得到列联表 1;同学乙从该校高三学生中获取容量为 40 的有放回简单随机样本,由样本数据整理得到列联表 2.

表 1 单位:人

性别	身高		合计
	<170 cm	≥170 cm	
女	81	16	97
男	28	75	103
合计	109	91	200

表 2 单位:人

性别	身高		合计
	<170 cm	≥170 cm	
女	15	6	21
男	9	10	19
合计	24	16	40

(I) 利用表 1,通过比较不低于 170 cm 的学生在女生和男生中的比率,判断该中学高三年级学生的性别和身高是否有关联.如果有关联,请解释它们之间如何相互影响;

(II) 利用表 2,依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,推断该中学高三年级学生的性别和身高是否有关联,并解释所得结论的实际含义;

(III) 以上两种方法得出的结论是否一致? 如果不一致,你认为哪种方法得出的结论准确,原因是什么?

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, x_{0.05} = 3.841$$

21. (本小题 15 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 集合 $M = \{f(x) \mid f(x+1) > 2f(x), \forall x \in I\}$.

(I) 若 $I = \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x$, 求证: $f(x) \in M$;

(II) 设 $I = (0, 1]$, $g(x) = a + \log_2 x$, 若 $g(x) \in M$, 求实数 a 的取值范围;

(III) 设 $I = [-1, 1]$, $h(x) = -x^2 + ax + a - 5$, $a \in \mathbf{R}$. 讨论函数 $h(x)$ 与集合 M 的关系.